

A1. Základní pojmy teorie množin. Intuitivní teorie množin, Peanova množina, kardinální a ordinální čísla, mohutnost kontinua. Množiny ve školské matematice.

Základní pojmy teorie množin

1. Konstrukce množiny

- Mám určitý soubor objektů a dokážu k němu vytvořit nový umělý objekt.
- Mám vlastnost, o které dokážu rozhodnout, jestli ji daný soubor má/nemá.
- Mohu vytvořit podmnožiny a z nich systém potenčních množin.

Všechny tyto kroky jsou nedostatečné, protože mohu vytvořit množiny, které nemohou existovat. (množinu s vlastností být sama sebe svým prvkem; holič, který má rozhoz ostříhat všechny, kdo se nemohou ostříhat sami, ...) **Russelův paradox**

2. Universum množin

Už nemůžu vytvořit jiné objekty, než jsou vytvořeny – „časový prvek“. Je potřeba ho dodat, aby nevznikali neexistující množiny.

3. Význam teorie

- Umožňuje modelovat ostatní studované metalické teorie
- Zásobárna struktur
- Obecná teorie nekonečna

Množina (def.): Třidu X nazveme množinou, právě když existuje taková třída Y , že platí $X \in Y$. Množinou jsou právě ty třídy, které jsou prvky nějaké třídy. Zapisujeme $M(X)$

Axiomy

AX1 $(\exists X)(\exists Y) X \in Y$ o existenci tříd

AX2 $(\forall X_1)(\forall Y_1)(\forall Z)[(X_1 = Y_1 \wedge X_1 \in Z) \Rightarrow Y_1 \in Z]$. invariance „rovná se“ vůči náleží

AX3 Pro každou formuli teorie tříd $\varphi(x, X_1, \dots, X_n)$, kde $n = 0, 1, \dots$ platí:

$(\forall X_1) \dots (\forall X_n)(\exists Y)(\forall x)[x \in Y \Leftrightarrow \varphi(x, X_1, \dots, X_n)]$. Schéma axiomů na vytváření tříd

AX4 $(\forall x)(\forall y) M(\{x, y\})$. axiom dvojice – pro libovolné množiny je třída $\{x, y\}$ množinou.

AX5 $(\forall x) M(\cup x)$. sjednocení množiny

AX6 Necht' F je zobrazení, potom $(\forall x) M(F''x)$. obraz množiny

AX7 $(\forall x) M(P(x))$. Potence množiny

Intuitivní teorie množin

Zakladatelem je George Cantor. Není ale přesná (Russelův paradox), dodnes se využívá např. v matematice na ZŠ.

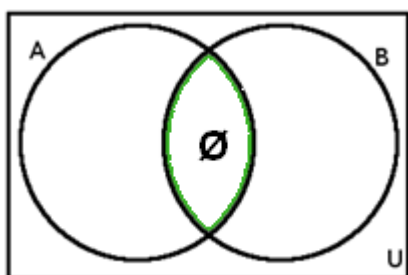
Inkluze:

- Prázdná množina je inkluzivní v každé množině a každá množina je inkluzivní sama v sobě. Množina A a prázdná množina se nazývají nevlastní podmnožiny množina A. Všechny ostatní podmnožiny se nazývají vlastní.
- Vlastnosti inkluze: vztah množinové inkluze je reflexivní, není symetrický, je tranzitivní.

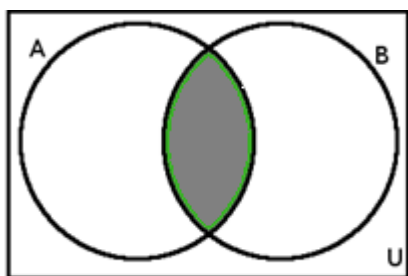
Množinová rovnost:

- „=“ znamená obsahovat tytéž prvky
- Definice: $A=B \Leftrightarrow (\forall x \in Z) x \in A \Leftrightarrow x \in B$z toho plyne věta:
 $(\forall A)(\forall B) A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- Vlastnosti rovnosti: reflexivnost, symetrie, tranzitivnost

Disjunkce množin:



Incidence množin:



pro společné prvky nebyl zvolen žádný ustálený symbol

Množinové operace:

- doplněk (A'): $A' = \{x \in Z; x \notin A\}$
- průnik ($A \cap B$): $A \cap B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \in B\}$
- sjednocení ($A \cup B$): $A \cup B = \{x \in Z; x \in A \vee x \in B\}$
- rozdíl ($A - B$): $A - B = \{x \in Z; x \in A \wedge x \notin B\}$

Metody ověření rovnosti množin: a) na základě definice

b) grafickou metodou pomocí Vennova diagramu

c) tabelárně

Zákony množinové algebry:

Nechť A, B, C jsou libovolné podmnožiny základní množiny Z . Pak platí:

- 1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$zákon asociativní pro sjednocení
- 2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$zákon asociativní pro průnik
- 3) $A \cup B = B \cup A$ zákon komutativní pro sjednocení
- 4) $A \cap B = B \cap A$zákon komutativní pro průnik
- 5) $A \cup Z = Z$
- 6) $A \cap Z = A$
- 7) $A \cup \emptyset = A$
- 8) $A \cap \emptyset = \emptyset$
- 9) $A \cup A' = Z$zákon vyloučené třetí možnosti
- 10) $A \cap A' = \emptyset$zákon sporu
- 11) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$zákon distributivnosti průniku ke sjednocení
- 12) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$zákon distributivnosti sjednocení k průniku
- 13) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ zákon de Morganův pro sjednocení
- 14) $(A \cap B)' = A' \cup B'$...zákon de Morganův pro průnik
- 15) $(A')' = A$...zákon dvojí negace
- 16) $\emptyset' = Z$
- 17) $Z' = \emptyset$
- 18) $(\forall A)(\forall B)(\exists C) A \cup B = C$
- 19) $(\forall A)(\forall B)(\exists C) A \cap B = C$
- 20) $\emptyset \neq Z$

Peanova množina:

Definice: Množina P se nazývá Peanova, má-li tyto vlastnosti:

PA1) Ke každému prvku x množiny P existuje právě jeden prvek x' , této množiny, který se nazývá následovníkem prvku x . st

PA2) $(\exists e \in P)(\forall x \in P)x' \neq e$

PA3) $(\forall x \in P)(\forall y \in P) x \neq y \Rightarrow x' \neq y'$

PA4) (princip matematické indukce) Nechť množina $M \subseteq P$ má tyto vlastnosti:

$$a) e \in M$$

b) $(\forall x \in P)(x \in M \Rightarrow x' \in M)$, pak množina M obsahuje všechny prvky množiny P .

Základní vlastnosti Peanovy množiny:

A1: Ke každému prvku x množiny P existuje jeho následovník x' .

A2: Existuje prvek (naoř. e), který není následovníkem žádného prvku.

A3: Různé prvky mají různé prvky

Vlastnosti Peanovy množiny:

1. Každý prvek Peanovy množiny, který je různý od prvku e , je následovníkem některého prvku této množiny.

Důkaz: Sestrojíme množinu M , která obsahuje všechny prvky Peanovy množiny, které jsou následovníky některého prvku. Takto sestavená množina M nemůže obsahovat prvek e . V prvním kroku však dokážeme, že prvek e množina obsahuje. Tudiž ho explicitně do množiny M „umístíme“. $M = \{e\} \cup \{x \in P; \exists y \in M) x = y'\}$

Dokážeme, že v množině M je splněn PA4:

$$1) e \in M$$

2) Necht' $x \in M$. To znamená, že k němu v množině M existuje „předchůdce“ y a platí $y' = x$. Máme dokázat, že $x' \in M$, tzn. že i k němu existuje předchůdce z , pro který platí $z' = x'$. Z toho ovšem plyne, že $z = x$. Ale $x \in M$ podle předpokladu.

2. Každý prvek Peanovy množiny je různý od svého následovníka.

Zřejmě do množiny M dáme ty prvky Peanovy množiny, které mají tu vlastnost, že se liší od svých následovníků ($M = \{x \in P, x \neq x'\}$).

1) Podle PA2 není prvek e následovníkem žádného prvku množiny P . Platí-li $x \neq x'$ pro každý prvek $x \in P$, platí to i pro prvek e , tedy $e \neq e'$. Z toho plyne $e \in M$.

2. Necht' $x \in M$. $x \neq x' \Rightarrow x' \neq (x')'$, protože různé prvky mají různé následovníky, a proto $x' \in M$.

3. Předchůdce:

Def.: Prvek $b \in P$, pro který platí $b' = a$, se nazývá předchůdce prvku a . Označení a' .

4. Úsek:

Def.: Úsekem Peanovy množiny příslušným k prvku a je množina $U_a \subset P$, která má vlastnost:

$$U_a = \{x \in P; a \notin U_a \wedge a' \in U_a \wedge (\forall x \in P)(s \in U_a \Rightarrow x' \in U_a)\}$$

$$5. (\forall a \in P)(\forall b \in P)a \in U_b \Rightarrow U_a \subseteq U_b.$$

Kardinální čísla

Def.: Necht' M je systém množin. Třída, v níž leží množina A a všechny množiny ze systému M s ní ekvivalentní, se nazývá *kardinální číslo množiny A* nebo *mohutnost množiny A* .

Operace s kardinálními čísly:

Součet mohutností dvou množin A, B se rovná mohutnosti množiny jejich sjednocení:

Necht' $a = m(A)$, $b = m(B)$ jsou dvě mohutnosti a necht' pro množiny A, B je $A \cap B = \emptyset$. Pak platí: **$m(A) + m(B) = m(A \cup B)$** . Znamená to, že součet mohutností provedeme takto: z jedné třídy rozkladu vybereme libovolnou množinu A o mohutnosti $m(A)$, z druhé třídy rozkladu libovolnou množinu B o mohutnosti $m(B)$, zjistíme, zda jsou množiny A a B disjunktní, v kladném případě provedeme jejich sjednocení, a hledáme tu třídu, do níž svou mohutností patří množina $A \cup B$. Součet mohutností nezávisí na výběru reprezentantů.

Součet mohutností:

Vlastnosti:

- Komutativnost: $(\forall A \in M) (\forall B \in M) m(A) + m(B) = m(B) + m(A)$
- Asociativnost: $(\forall A \in M) (\forall B \in M) (\forall C \in M) [m(A) + m(B)] + m(C) = m(A) + [m(B) + m(C)]$

Součin mohutností:

Necht' A, B jsou libovolné množiny ze systému M . Necht' $m(A)$ a $m(B)$ jsou jejich mohutnosti.

Pak **$m(A) \cdot m(B) = m(A \times B)$**

Součin mohutností nezávisí na výběru reprezentantů.

Vlastnosti:

- komutativnost: $(\forall A \in M) (\forall B \in M) m(A) \cdot m(B) = m(B) \cdot m(A)$
- asociativnost: $(\forall A \in M) (\forall B \in M) (\forall C \in M) [m(A) \cdot m(B)] \cdot m(C) = m(A) \cdot [m(B) \cdot m(C)]$
- násobení mohutností je distributivní vzhledem ke sčítání:
 $(\forall A \in M) (\forall B \in M) (\forall C \in M) [m(A) + m(B)] \cdot m(C) = m(A) \cdot m(C) + m(B) \cdot m(C)$

Ordinální čísla

Def.: Ordinální číslo lineárně dobře uspořádané množiny A ze systému množin M je ta třída, do níž patří množina A a všechny množiny s ní podobné.

Uspořádání množiny sjednocení:

Necht' $(A, \triangleleft)$ a $(B, \triangleleft')$ jsou dvě disjunktní lineárně dobře uspořádané množiny a necht' $a = \text{ord } A$, $b = \text{ord } B$. Pak množinu $(A \cup B, <)$ uspořádáme takto:

- jsou-li x a y dva prvky z $A \cup B$, které patří do A , pak je $x < y$ právě když $x \triangleleft y$ v A ,
- jsou-li x a y dva prvky z $A \cup B$, které patří do B , pak je $x < y$ právě když $x \triangleleft' y$ v B ,
- jsou-li x a y dva prvky z $A \cup B$, z nichž $x \in A$ a $y \in B$, pak v $A \cup B$ je $x < y$.

Součet ordinálních čísel a, b (v tomto pořadí) je ordinální číslo množiny $A \cup B$, která je dobře uspořádaná podle vztahu uspořádaná množiny sjednocení.

Uspořádání množiny kartézského součinu:

Nechť $(A, \triangleleft)$ a $(B, \triangleleft')$ jsou dvě lineárně dobře uspořádané množiny a nechť $a = \text{ord } A, b = \text{ord } B$. Pak množinu $(A \times B, <)$ uspořádáme takto:

$(x, y) < (x', y') \Leftrightarrow y \triangleleft' y' \vee$ množině B . Je-li $y = y' \vee$ množině B , pak $(x, y) < (x', y')$ v množině $A \times B$, právě když $x \triangleleft y$ v množině A .

Součinem dvou ordinálních čísel a, b (v tomto pořadí) rozumíme ordinální číslo množiny $(A \times B, <)$, která je uspořádána podle vztahu uspořádání množin kartézského součinu.

Ordinální číslo přirozeně uspořádané množiny přirozených čísel $(\mathbb{N}, <)$ označujeme řeckým písmenem.

Vlastnosti operací s ordinálními čísly:

a) sčítání ordinálních čísel není komutativní – $(\exists a)(\exists b) a + b \neq b + a$

např. $\omega + 1 \neq 1 + \omega$, neboť $\{1, 2, 3, \dots, 0\}$ není podobná množině $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

b) Násobení ordinálních čísel není komutativní – $(\exists a)(\exists b) a \cdot b \neq b \cdot a$

např. $\omega \cdot 2 \neq 2 \cdot \omega$, neboť množina $\{0, 2, \dots, 1, 3, \dots\}$ není podobná množině $\{0, 1, 2, \dots\}$.

c) Sčítání ordinálních čísel není asociativní – $(\forall a)(\forall b)(\forall c) (a + b) + c = a + (b + c)$

důkaz: Musíme dokázat, že $(\forall A)(\forall B)(\forall C) (A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C)$. Protože dokonce platí rovnost těchto množin, je tvrzení dokázáno.

d) Násobení ordinálních čísel je asociativní – $(\forall a)(\forall b)(\forall c) (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

důkaz: $(a \cdot b) \cdot c = \text{ord} [(A \times B) \times C]$, $a \cdot (b \cdot c) = \text{ord} [A \times (B \times C)]$, přičemž oba tyto kartézské součiny jsou uspořádány podle naší úmluvy. Toto uspořádání je zřejmě dobré. $(A \cup B) \cup C \sim A \cup (B \cup C)$, neboť zobrazení $f[(a, b, c)] = [a, (b, c)]$ je podobné zobrazení. Z podobnosti obou množin plyne rovnost ordinálních čísel.

e) Násobení zprava není distributivní vzhledem ke sčítání – $(\exists a)(\exists b)(\exists c) (a + b) \cdot c \neq a \cdot c + b \cdot c$

stačí zvolit např. $a = \omega, b = 1, c = 2$.

f) Násobení zleva je distributivní vzhledem ke sčítání.

Mohutnost kontinua:

Def.: Dyadickým zlomkem nazýváme racionální číslo tvaru $\frac{a}{2^n}$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$. O dyadickém zlomku $\frac{a}{2^n}$ říkáme, že má n dyadických míst.

Tvrzení 1: Ke každému reálnému číslu α a každému přirozenému číslu n existuje právě jeden dyadický zlomek $\frac{a}{2^n}$ pro který platí: $\frac{a}{2^n} \leq \alpha < \frac{a+1}{2^n}$

Def.: Dyadický zlomek $\frac{a}{2^n}$, který vyhovuje výše uvedené podmínce, se nazývá n-místná dyadická aproximace reálného čísla α a zlomek $\frac{a+1}{2^n}$ se nazývá n-místná dyadická horní aproximace reálného čísla α .

Tvrzení 2: Je-li $m > n$, $m \in \mathbb{N}$, pak pro dolní a horní dyadické aproximace čísla α platí:

$$\frac{a}{2^n} < \frac{b}{2^m} < \frac{b+1}{2^m} < \frac{a+1}{2^n}$$

Všechny dyadické dolní aproximace téhož reálného čísla α je možno zapsat jediným zápisem $c, c_1, c_2, c_3, \dots$, kde $c \in \mathbb{C}$ a každé c_i se rovná buď nule, nebo jedné. Např.. $c, c_1 c_2$ je dvojmístná dyadická dolní aproximace, $c, c_1 c_2 c_3$ trojmístná dyadická dolní aproximace, atd.

Def.: Zápis $c, c_1, c_2, c_3, \dots$ se nazývá nekonečný dyadický rozvoj reálného čísla α .

- Každý dyadický zlomek má dva nekonečné rozvoje:

a) $c, c_1, c_2, c_3 \dots 011111 \dots$

b) $c, c_1, c_2, c_3 \dots 100000 \dots$

Protože chceme, aby zobrazení dyadických zlomků na jejich dyadické rozvoje bylo jedno - jednoznačné, rozvoje typu a) z našich úvah vyloučíme. Na základě této úmluvy můžeme přijmout další tvrzení:

Tvrzení 3: Každé reálné číslo α má právě jeden nekonečný dyadický rozvoj $c, c_1, c_2, c_3, \dots$, v němž nejsou všechny číslice c_n od jistého indexu počínajíc samé jedničky. Tvrzení platí i v obráceném směru.

Množiny mohutnosti kontinua:

Pozn. – každé reálné číslo se jednoznačně zobrazí bodem na číselné ose, která je hustá (tzn. mezi každými dvěma body leží aspoň jeden další bod) a nemá mezery

- Lineárně a hustě uspořádané množině bez mezer říkáme kontinua.
- Množiny mohutnosti kontinua jsou ekvivalentní s množinou reálných čísel.
- Je nutné dokázat, že množina reálných čísel není spočetná.

Věta: Množina $\mathbb{R}^+$ všech kladných reálných čísel je nespočetná. (důkaz sporem)

Věta: Každá nespočetná množina obsahuje aspoň jednu spočetnou podmnožinu.

Věta: Budiž A nespočetná množina a A_1 její nejvýše spočetná podmnožina. Pak množiny A a $A - A_1$ jsou ekvivalentní.

Věta: Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel má mohutnost $2^{\aleph_0}$.

Def.: Kardinální číslo $2^{\aleph_0}$ se nazývá mohutnost kontinua.

Def.: Přírozená ordinální čísla se nazývají ordinární čísla první třídy. Množinu těchto čísel označujeme $\mathbf{W}_0$. Ordinální čísla spočetných dobře uspořádaných množin nazýváme spočetná ordinální čísla nebo také ordinální čísla druhé třídy. Množinu těchto čísel označíme symbolem $\mathbf{Z}_1$. Tedy $\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_0 \cup \mathbf{Z}_1$

Def.: Mohutnost množiny Z_1 transfinitních ordinálních čísel druhé třídy označujeme $\aleph_1$. $\text{Ord}(Z_1, <)$ značíme symbolem ω_1

Symbolika nejčastěji používaná v literatuře:

$\text{ord}(W_0, <) = \omega$, $\text{card } W_0 = \aleph_0$ $\text{ord}(Z_1, <) = \omega_1$, $\text{card } Z_1 = \aleph_1$

Hypotéza kontinua:

Mohutnost kontinua $2^{\aleph_0}$ je buď větší než $\aleph_1$, nebo se rovná $\aleph_1$. Předpoklad, že $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, se nazývá hypotéza kontinua.

A2. Číselné obory a jejich rozšiřování. Číselné obory a jejich rozšiřování. Motivace rozšíření, definice čísel celých, racionálních, reálných a komplexních. Dělitelnost v oboru celých čísel. Číselné soustavy. Reflexe ve školské matematice.

Motivace rozšíření

K vysvětlování lze využít množin balony. Např. **pingpongový míček** jsou přirozená čísla. Další množinou jsou celá čísla - **tenisáky**, do kterého se vejde i pingpongový míček. To znamená, že celá čísla jsou přirozená čísla + další čísla (záporná a 0). Další množinou jsou racionální čísla – **házenkářský míč** (obsahuje tenisák i pingpongový míček), racionální čísla rozšířená o zlomky a desetinná čísla. Další množinou jsou reálná čísla – **volejbalový míč**, který obsahuje racionální čísla rozšířená o iracionální čísla. Největší množinou je **basketbalový míč** – množina komplexních čísel, který obsahuje všechny předchozí množiny.

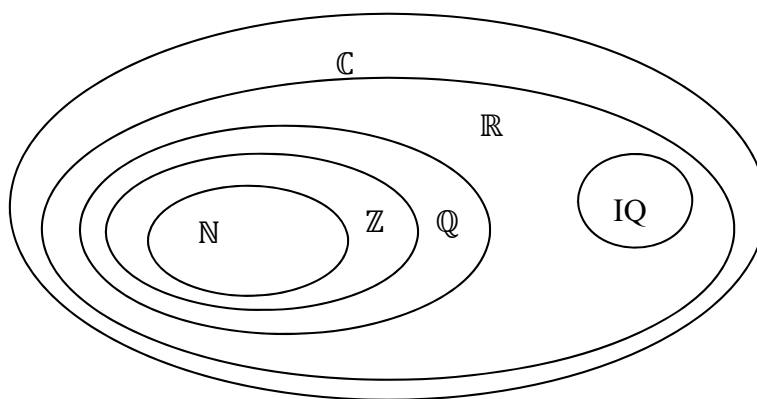
$\mathbb{N}$ - pingpongový míček

$\mathbb{Z}$ - tenisák

$\mathbb{Q}$ - házenkářský míč

$\mathbb{R}$ - volejbalový míč

$\mathbb{C}$ - basketbalový míč



Číselné obory

PŘIROZENÁ ČÍSLA

Udávají počet prvků v konečných neprázdných množinách, popř. pořadí prvků v uspořádaných množinách. Lze je zapisovat v pozičních číselných soustavách (desítková, dvojková, ...) nebo v nepozičních číselných soustavách (např. římská číselná soustava). V množině $\mathbb{N}$ je definováno uspořádání, sčítání a násobení.

CELÁ ČÍSLA

= přirozená čísla (kladná celá čísla), nula a záporná celá čísla

- Označení: $\mathbb{Z}$
- V oboru $\mathbb{Z}$ jsou bez omezení proveditelné operace sčítání i odčítání a násobení.

Dělitelnost:

Celé číslo a je **násobkem** celého čísla b (číslo a je **dělitelné** číslem b), existuje-li takové celé číslo x , že $a = bx$; o číslu b pak říkáme, že je dělitelem čísla a .

Společný dělitel dvou nebo více čísel je celé číslo, kterým je dělitelné každé z nich; jejich **společný násobek** je celé číslo dělitelné libovolným z nich. Čísla 1, -1 se nazývají **samozřejmí společní dělitelé celých čísel**. Nemají-li celá čísla jiné společné dělitele než samozřejmé, nazýváme je **nesoudělná celá čísla**.

Věta o algoritmu dělení v oboru $\mathbb{Z}$. Ke každým dvěma celým číslům a, b , z nichž b je různé od nuly, existuje právě jedna dvojice celých čísel q, r takových, že platí:
 $a = bq + r, 0 \leq r < |b|$

RACIONÁLNÍ ČÍSLA

= reálná čísla, která vyjadřují podíly $\frac{a}{b}$, kde $a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C} \wedge b \neq 0$ (např.: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$)

- speciálním případ, např.: $\frac{3}{1} = 3, -\frac{3}{1} = -3$
- s racionálními čísly ve tvaru $\frac{a}{b}$ se počítá podle pravidel počítání se zlomky

Vyjádření racionálních čísel desetinným rozvojem:

Racionální číslo $a/10^n$, kde n je přirozené číslo, se nazývá **desetinný zlomek**: $a/10^n = \pm (p + p_1/10 + p_2/10^2 + \dots + p_n/10^n)$, kde p je celé číslo a p_i ($i = 1, 2, \dots, n$) jsou celá čísla, pro něž platí $0 \leq p_i \leq 9$. Místo uvedeného zápisu se stručně píše $a/10^n = \pm p, p_1, p_2 \dots p_n$

Symbolu na pravé straně této rovnosti se říká ukončený desetinný rozvoj, čárka v desetinném rozvoji se nazývá desetinná čárka; o cifře p_i se říká, že je na i -tém desetinném místě nebo že je číslicí řádu $-i$.

Číslo 10^{-i} se nazývá jednotka řádu $-i$; místo jednotka řádu -1 se též užívá názvu desetina, podobně jednotce řádu -2 se říká setina, jednotce řádu -3 tisícina atd.

REÁLNÁ ČÍSLA

= matematické objekty, které tvoří prvky množiny $\mathbb{R}$, v níž jsou definovány následující vztahy a operace:

Vztah rovnosti mezi reálnými čísly:

1. $a=a$, pro každé $a \in \mathbb{R}$...symetrie rovnosti
2. $a=b \Rightarrow b=a$...reflexivnost rovnosti
3. $a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$...tranzitivnost rovnosti

Ke každé uspořádané dvojici čísel $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ je jednoznačně přiřazeno reálné číslo

$a + b$ zvané součet reálných čísel:

1. Pro každou dvojici čísel $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ platí: $a+b=b+a$...komutativní zákon pro sčítání
2. Pro každou trojici čísel $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$ platí: $a+(b+c)=(a+b)+c$...asociativní zákon pro sčítání
3. Existuje číslo $0 \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ platí: $a+0=a$
4. Pro každé číslo $a \in \mathbb{R}$ existuje číslo $-a \in \mathbb{R}$ takové, že platí $a+(-a)=0$

Ke každé uspořádané dvojici čísel $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ je jednoznačně přiřazeno reálné číslo ab zvané součin reálných čísel:

1. $ab=ba$..komutativní zákon pro násobení
2. $a(bc)=(ab)c$...asociativní zákon pro násobení
3. $a \cdot 1=a$
4. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Pro každé $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$ platí:

$(a+b)c = ac + bc$...distributivní zákon pro násobení vzhledem ke sčítání

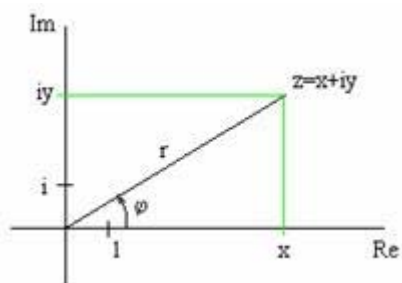
- Pro každé $a \in \mathbb{R}$ platí právě jeden ze vztahů: $a>0$, $-a<0$, $a=0$
- Je-li $a > 0 \wedge b > 0$, je $a + b > 0 \wedge ab > 0$
- Absolutní hodnota reálného čísla
- Geometrické znázornění (zobrazení) reálných čísel: číselná osa

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

= jsou uspořádané dvojice reálných čísel (označujeme je $a = [a_1, a_2]$, a_1 se nazývá reálná část, a_2 imaginární část komplexního čísla a), pro něž je definován vztah rovnosti a operace sčítání a násobení: komplexní čísla $a = [a_1, a_2]$ a $b = [b_1, b_2]$ jsou si **rovna**, jestliže zároveň platí $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$

- Nerovnost mezi komplexními čísly nedefinuje.
- **Součet:** $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$ je komplexní číslo $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$, značíme je **$a + b$**
- **Součin:** $a = [a_1, a_2]$, $b = [b_1, b_2]$ je komplexní číslo $[a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1]$, značíme je **$a \cdot b$**
- **Absolutní (prostá) hodnota:** $z = [z_1, z_2]$ nazýváme reálné číslo **$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$**
- Komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je rovna jedné, se nazývá **komplexní jednotka**. Speciálním případem je číslo $i = [0, 1]$ zvané **imaginární jednotka**, pro níž platí $i^2 = -1$

Geometrické zobrazení (znázornění) komplexních čísel:



- Gaussova rovina (= rovina komplexních čísel)
- Osa Re – osa reálná (osa reálných čísel), Osa Im – osa imaginární (osa imag. čísel)

Algebraický tvar komplexního čísla:

Každé komplexní číslo lze vyjádřit ve tvaru $a+bi$. Reálné číslo a nazýváme reálnou částí komplexního čísla, reálné číslo b imaginární částí. Komplexní číslo i , pro něhož platí $i^2=-1$, nazýváme imaginární jednotkou. **Výraz $a+bi$ nazveme algebraickým tvarem komplexního čísla.**

Goniometrický tvar komplexního čísla:

$$r_a (\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Číselné soustavy

Dvojková (binární) soustava:

- Soustava o základu 2.
- Používá pouze dvě číslice – 0, 1.

Těmito prostými číslicemi zvanými bity (z anglického výrazu pro dvojkovou číslici – Binary digit) lze vyjádřit jakékoli číslo tím, že ho rozložíme na součet postupných mocnin se základem 2, tj. na čísla: $2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, atd.

Pokud se při tomto rozkladu příslušná mocnina v daném řádu vyskytuje, zapisujeme ji jako 1, chybí-li, píšeme 0. Pro lepší představu přepisu prvních deseti čísel z desítkové do dvojkové soustavy poslouží následující tabulka:

Číslo desítkové	Rozklad na posloupnost mocnin	Zápis ve dvojkové soustavě
0		0000
1	$1 \cdot 2^0$	0001
2	$1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0010
3	$1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0011
4	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0100
5	$1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0101
6	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	0110
7	$1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	0111
8	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$	1000
9	$1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	1001

Další soustavy

Osmičková (oktalová) soustava:

Je to polyadická číselná soustava o základu $g = 8$. Používá osm číslic: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Desítková (dekadická) soustava:

Je to polyadická číselná soustava o základu $g = 10$. Používá číslice 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Šestnáctková (hexadecimální) soustava:

Je to polyadická číselná soustava o základu $g = 16$. Používá šestnáct číslic (znaků): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F (místo 10, 11, 12, 13, 14, 15). Šestnáctková soustava se používá například pro zápis barvy v HTML kódu. Je to v podstatě zkrácená forma zápisu dvojkové soustavy.

Reflexe ve školské matematice

- 5. tř. dvojková a desítková soustava
- 6. tř. desetinná čísla, dělitelnost přirozených čísel
- 7. tř. celá čísla, racionální čísla.

A3. Lineární rovnice a nerovnice, jejich soustavy. Algebraické a transcendentní rovnice. Diofantovské rovnice. Typy rovnic ve školské matematice, metody jejich řešení.

Lineární rovnice a nerovnice

Rovnost

= relace, neboli vztah vyjadřující totožnost objektů, které jsou v tomto vztahu; každý objekt je roven jen sám sobě

Rovnice

= je zápis rovností dvou výrazů, v nichž se může vyskytnout nějaké písmeno označující tzv. neznámou.

- jakákoli výroková forma o n proměnných $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, jejímž oborem proměnnosti je množina všech reálných čísel. Řešením této rovnice rozumíme pak každý prvek z oboru pravdivosti výrokové formy $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tj. každou uspořádanou n -tici reálných čísel $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, pro niž je výrok $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pravdivý.
- číslo x , které vyhovuje dané rovnici (tj. jeho dosazením do rovnice za proměnnou se převede rovnice na pravdivou rovnost) se nazývá **kořen rovnice** neboli řešení rovnice.

Řešit rovnici znamená:

- najít libovolné x vyhovující dané rovnici
- najít množinu všech x vyhovujících dané rovnici
- najít postup, kterým určíme všechny kořeny rovnice

Ekvivalentní úpravy

- postup, kterým z dané rovnice získáme jinou rovnici se stejnou množinou kořenů
- smyslem ekvivalentních úprav je dostat rovnici do nějakého jednoduššího tvaru, ze kterého už můžeme vypočítat výsledek rovnice
- provedeme-li s libovolnou **rovnicí** některou z těchto úprav, vznikne rovnice ekvivalentní s původní:
 - násobení obou stran rovnice nenulovým číslem
 - přičtení téhož čísla k oběma stranám rovnice
 - přičtení libovolného násobku mocniny neznámé s přirozeným exponentem k oběma stranám rovnice
- provedeme-li s libovolnou **nerovnicí** některou z těchto úprav, vznikne rovnice ekvivalentní s původní
 - přičtení téhož čísla k oběma stranám nerovnice

- přičtení libovolného násobku neznámé k oběma stranám nerovnice
- přičtení libovolného násobku mocniny s přirozeným exponentem k oběma stranám nerovnice
- násobení obou stran nerovnice tímž kladným číslem
- násobení obou stran nerovnice tímž záporným číslem se současnou změnou smyslu nerovnice (mění se smysl nerovnosti, znak $<$ je nutno nahradit znakem $>$ a obráceně)
- provedeme-li v dané **soustavě rovnic** některé z těchto úprav, je upravená soustava ekvivalentní s původní soustavou
 - nahrazení libovolné rovnice rovnicí s ní ekvivalentní
 - přičtení libovolného násobku jedné rovnice k jiné rovnici soustavy
 - vypuštění rovnice, která je ekvivalentní s některou jinou rovnicí soustavy
 - záměnou pořadí rovnic

Implikační úprava je zejména umocnění obou stran (ne)rovnice tímž přirozeným číslem.

Zkouška je logicky nutnou fází při řešení, v nichž se užívají neekvivalentní úpravy (ne)rovnic, což jsou zejména:

- násobení (ne)rovnice výrazem s proměnnou
- umocňování (ne)rovnice

Lineární rovnice

= uvažujeme dvě funkce $f(x)$, $g(x)$ které jsou definovány na nějaké množině D , pak nalezení všech $x \in D$, která splňují rovnost $f(x) = g(x)$ se nazývá rovnicí o jedné neznámé x (rovnice 1. stupně)

Obecný tvar: $ax + b = 0$

Lineární rovnice může mít mnoho různých tvarů. Abychom mohli lineární rovnice řešit, potřebujeme je upravit na základní tvar. Základní tvar vypadá takto: x je neznámá a symboly a a b jsou libovolná reálná čísla. Přitom číslo a nesmí být nulové, tj. $a \neq 0$. Výrazu ax říkáme lineární člen, výrazu b absolutní člen.

Lineární nerovnice

= výroková formule $ax + b < 0$ nebo $ax + b > 0$

Je-li v nerovnici $ax < b$, resp. $ax > b$ nulový koeficient a , $a = 0$, není tato rovnice lineární a řešení je následující:

- je-li $b > 0$ nemá daná nerovnice řešení
- je-li $b < 0$ má daná nerovnice nekonečně mnoho řešení

Lineární nerovnicí v součinném nebo podílovém tvaru s neznámou x nazýváme každou nerovnici, ve které je v součinu nebo v podílu jeden nebo více lineárních dvojčlenů. Lineární nerovnicí v součinném nebo podílovém tvaru dále nazývám každou nerovnici, kterou lze pomocí tzv. **ekvivalentních úprav** převést na nerovnici ve výše uvedeném tvaru.

Při řešení tohoto typu rovnic používáme buď metodu převodu dané rovnice na řešení soustavy nerovnic (zpravidla v případě, kdy se v nerovnici vyskytují v součinu nebo podílu pouze dva lineární dvojčleny), anebo metodu nulových bodů (v případě většího počtu lineárních dvojčlenů).

Nerovnice v součinném tvaru:

Jde o typ nerovnic:

$$V_1(x) \cdot V_2(x) > 0 \quad V_1(x) \cdot V_2(x) < 0$$

$$V_1(x) \cdot V_2(x) \geq 0 \quad V_1(x) \cdot V_2(x) \leq 0$$

$$V_1(x) \cdot V_2(x) \neq 0$$

Nerovnice v podílovém tvaru:

$$\frac{V_1(x)}{V_2(x)} > 0 \quad \frac{V_1(x)}{V_2(x)} < 0$$

$$\frac{V_1(x)}{V_2(x)} \geq 0 \quad \frac{V_1(x)}{V_2(x)} \leq 0$$

Soustavy lineárních rovnic

Soustavou dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými x, y nazýváme každou soustavu rovnic ve tvaru:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

kde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in R$.

Při řešení soustav rovnic dále nově používáme tyto ekvivalentní úpravy:

- dosazení výrazu, kterým z jedné rovnice vyjádříme některou neznámou pomocí druhé neznámé, za příslušnou neznámou do zbývajících rovnic
- přičtení některé rovnice soustavy k zbývajícím rovnicím této soustavy
- vynásobení některé rovnice soustavy nenulovým číslem a současně přičtení násobku zbývajících rovnic soustavy k této násobené rovnici.

Řešením soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými jsou uspořádané dvojice reálných čísel. Při řešení soustavy dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými může nastat jedna z následujících možností:

- soustava má jediné řešení
- soustava má nekonečně mnoho řešení (tato řešení tvoří v kartézské soustavě souřadnic přímku)
- soustava nemá řešení

Pomocí Frobeinovy věty zjistíme, zda je soustava řešitelná. Pokud se rovná hodnost matice hodnosti matice rozšířené je soustava řešitelná. Hodnost h matice A typu (m, n) nazýváme maximální počet lineárně nezávislých vektorů tvořících řádky, popř. sloupce matice A .

Gaussova eliminační metoda – ekvivalentními úpravami převedeme matici na matici trojúhelníkovitého typu, tj. aby pod diagonálou zůstaly samé nuly. Vypočítáme poslední neznámou a dosadíme zpátky do rovnice.

Gaussova eliminační metoda

1. Úprava na trojúhelníkový tvar

2. Rozhodnutí o řešitelnosti rovnice (úprava matice na schodový tvar)

- hodnost matice $h(A)$ a hodnost matice rozšířené $h(A/b)$

$h(A)=h(A/b)=n$	soustava má právě jedno řešení
$h(A)=h(A/b)<n$	soustava má nekonečně mnoho řešení (parametrizace)
$h(A) \neq h(A/b)$	soustava nemá řešení

Např.

Soustava 4 rovnic o 4 neznámých. Po úpravě $h(A)=3$, $h(A/b)=3$, $n=4$, tzn. soustava má nekonečně mnoho řešení.

Počet parametrů je: $n-h(A)$ tzn. $4-3=1$ (za parametr nevolíme x_1, x_2, x_3). Za parametr nevolíme proměnné odpovídající sloupcům s prvotními prvky řádků matice ve schodovém tvaru. Parametr $t=x_4$.

5) Cramerovo pravidlo – soustava n lineárních rovnic o n neznámých

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

.....

$$a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

s nenulovým determinantem soustavy $D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$

má právě jedno řešení $(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i = \frac{D_i}{D}$, přitom D_i je determinant, který vznikne z D tím, že

v něm i -tý sloupec nahradíme sloupcem pravých stran rovnic.

Determinant spočítáme pomocí Sarussova pravidla¹, který spočívá v úpravě původní matice, kdy k matici připišeme jako čtvrtý a pátý řádek její první a druhý řádek.

¹ pro výpočet determinantu matice 2. a 3. řádu

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Prvky ležící na úhlopříčkách vynásobíme, ty úhlopříčky, které směřují zleva doprava sečteme a těm, které směřují zprava doleva, přiřadíme znaménko minus.

$$D = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Cramerovo pravidlo

Nechť A je regulární² matice řádu n a A_i je čtvercová matice řádu n vzniklá z matice A nahrazením i -tého

sloupce matice A vektorem b . Potom jediné řešení $x=(x_1, \dots, x_n)^T$ je dáno vztahem: $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$

Př:

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$

$$x_1 - 6x_3 = -3$$

$$2x_1 + 4x_2 = 0$$

$$\det A = \det \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -36$$

Matice A je regulární, můžeme pokračovat dál.

$$\det A_1 = \det \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} = 36$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{36}{-36} = -1 \quad (1. \text{ sloupec nahrazen } 4.)$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -6 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -18$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-18}{-36} = \frac{1}{2}$$

$$\det A_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12$$

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-12}{-36} = \frac{1}{3}$$

Řešení dané soustavy je tedy:

² čtvercová, jejíž determinant $\neq 0$, řádky regulární matice jsou lin. nezávislé – pokud je lin. kombinace $= 0$ ($\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$)

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)^T$$

- Pokud je matice A singulární (Det=0), je lepší dále počítat pomocí Gaussovy eliminační metody.
- Pokud je matice A singulární matice a ostatní matice A_i jsou také singulární, má soustava nekonečně mnoho řešení.
- Pokud je matice A singulární matice a alespoň jedna z matic A_i je regulární, pak daná soustava nemá řešení.

6) Metoda užití inverzní matice

Jsou-li lineární rovnice nezávislé a má-li soustava právě jedno řešení (hodnota matice je rovna hodnotě matice rozšířené a zároveň rovna počtu neznámých), lze užit inverzní matice k řešení soustavy rovnic.

Jestliže platí: $A \cdot x = C$, kde A je matice soustavy a C je sloupec pravých stran rovnic.

Pak můžeme napsat $A \cdot x = C \quad / \cdot A^{-1}$

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot C, \text{ kde } A^{-1} \text{ je inverzní matice.}$$

Pro inverzní matici platí: $A \cdot A^{-1} = E$, kde E je jednotková matice.

Sestavíme si matici typu $(n, 2n)$, jejíž pravou stranu bude tvořit jednotková matice.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a tuto matici upravíme ekvivalentními úpravami na matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pak matice $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$ bude inverzní.

Př.:

$$x_1 + x_2 - x_3 = -2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7$$

$$\left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1-1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\rangle \approx \left\langle \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/4 & 2/4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 5/4 & -1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & 1/4 & -1/2 \end{array} \right\rangle$$

$$x = A^{-1} \cdot C$$

$$x = \begin{bmatrix} 2/4 & 2/4 & 0 \\ 5/4 & -1/4 & -1/2 \\ 3/4 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7) Grafické řešení – jestliže sestojíme množiny bodů, jejichž souřadnice jsou řešeními jednotlivých rovnic soustavy, pak grafickým řešením soustavy jsou souřadnice bodů společného průniku všech těchto podmnožin.

Algebraické a transcendentní rovnice

ALGEBRAICKÉ ROVNICE

- **rovnost polynomů definujeme jako $g(x)=h(x)$**
 - symbol „ $=$ “ v tomto případě označuje binární relaci na množině všech polynomů z $T[x]$
- rovnost lze chápat tak, že hledáme prvky α z nadtělesa T' tělesa T , které po dosazení do obou polynomů $g(x)$ a $h(x)$ dají též prvek $g(\alpha) = h(\alpha) \in T \Rightarrow$ takovou úlohu nazýváme algebraickou rovnicí o jedné neznámé x nad tělesem T

A) LINERÁRNÍ

B) KVADRATICKÉ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- ax^2 kvadratický člen, bx lineární člen a c absolutní člen

Odvození vzorce pro diskriminant

V rovnici kv. rovnice zavedu takovou substituci, aby vypadl prostřední člen: $x=y+m$

$$a(y+m)^2 + b(y+m) + c = 0$$

$$a(y^2 + 2ym + m^2) + b(y+m) + c = 0$$

$$ay^2 + 2aym + am^2 + by + bm + c = 0 \quad \text{vytknout ypsilon}$$

$$ay^2 + y(2am + b) + am^2 + mb + c = 0 \quad 2am + b = 0 \Rightarrow m = -\frac{b}{2a}$$

$$ay^2 + a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2a}\right)b + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = 0$$

$$ay^2 + \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = 0$$

$$ay^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$y^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$y_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dosadit do: $x = y + m$

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D > 0$, rovnice má dvě reálná řešení

$D = 0$, rovnice má jedno dvojnásobné řešení

$D < 0$, dvě různá imaginární řešení, jimiž jsou čísla komplexně sdružená

Odvození Vietových vzorců

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \Rightarrow p = \frac{b}{a}, q = \frac{c}{a}$$

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$$

$$x^2 + px + q = x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2$$

$$x^2 + px + q = x^2 - x(x_2 + x_1) + x_1x_2$$

$$-p = x_2 + x_1$$

$$q = x_1x_2$$

VIETOVY VZORCE

C) KUBICKÉ ROVNICE (rovnice 3. stupně)

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kde x je neznámá, koeficienty $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$.

- ax^3 kubický člen, bx^2 kvadratický člen, cx lineární člen a d absolutní člen kubického čtyřčlenu.

- a, b, c koeficienty

Každá kubická rovnice s reálnými koeficienty má minimálně jeden reálný kořen. Není ale úplně jednoduché se k tomuto kořeni dostat. Ačkoliv obdobně jako u kvadratické rovnice existují vzorce pro výpočet kořenů kubické rovnice, jejich výpočet je poměrně složitá záležitost.

Ukážeme si proto nejprve tři postupy, jak můžeme vyřešit některé speciální kubické rovnice za pomoci znalostí, které již máme z předchozích kapitol, a na tyto vzorce jen odkážeme.

1) Kubické rovnice v součinném tvaru

Máme-li kubickou rovnici zadanou v tzv. **součinném tvaru lineárních činitelů** je určení jejích kořenů velmi jednoduché.

Kubická rovnice v součinném tvaru vypadá následovně:

$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$, kde x je neznámá a a, x_1, x_2, x_3 jsou reálná čísla.

Kořeny této rovnice pak jsou čísla x_1, x_2 a x_3 .

Kromě součinného tvaru, ještě můžeme snadno určit kořeny z částečného rozložení kubického čtyřčlenu na součin. Dostaneme-li kubickou rovnici zadánu ve tvaru: $a(bx + c)(dx^2 + ex + f) = 0$, výpočet kořenů také nebude složitý.

Vyjdeme z tvrzení, že **součin dvou výrazů je nulový, když alespoň jeden z těchto výrazů je nulový**. Má-li součin lineárního dvojčlenu s kvadratickým trojčlenem být nulový, musí být nulový alespoň jeden z nich, neboli kubickou rovnici rozdělíme na řešení jedné lineární ($bx + c = 0$) a jedné kvadratické ($dx^2 + ex + f = 0$) rovnice.

Lineární rovnice $bx + c = 0$ bude mít vždy jeden reálný kořen. A to je právě ten jeden reálný kořen, který musí mít každá kubická rovnice. Budeme-li totiž v návaznosti řešit kvadratickou rovnici $dx^2 + ex + f = 0$, může se nám stát, že nebude mít v oboru reálných čísel kořeny.

Př:

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $7(-2x + 2)(2x^2 - 8x + 8) = 0$

Má-li být součin nulový, musí být alespoň jeden činitel nulový. Proto řešení rozdělíme na dvě rovnice.

$$7(-2x + 2) = 0$$

$$x = -1$$

$$2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$D = 0, x = -2$$

Získali jsme tedy dva kořeny kubické rovnice: -2 (dvojnásobný kořen, čili můžeme říci, že máme tři kořeny) a 1 a můžeme zapsat $K = \{-2, 1\}$

2) Kubická rovnice bez absolutního členu

$$- ax^3 + bx^2 + cx = 0$$

Jak je vidět, z výrazu na levé straně rovnice můžeme jednoduše vytknout x a celou rovnici tak převedeme na předchozí případ, kdy máme rovnici zadanou jako součin lineárního a kvadratického členu

Př.:

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $x^3 - x^2 + x = 0$.

$$K = \{0\}$$

Každá kubická rovnice bez absolutního členu má kořen 0. Některé pak mají i další reálné kořeny.

3) Kubická rovnice s celočíselným kořenem

Víme-li, že daná kubická rovnice má celočíselný kořen, můžeme ho zkusit uhádnout. Pokud bychom totiž hodnotu takového kořenu znali, mohli bychom z kubického čtyřčlenu vytknout výraz $x - k$, kde k by byla hodnota známého kořenu. Tím kubický čtyřčlen převedeme na součin lineárního a kvadratického členu, což už umíme řešit.

Nalézt tuto hodnotu ale nemusí být vždy úplně jednoduché a nelze postupně dosazovat všechna celá čísla. Pokud ale kubickou rovnici **upravíme na tvar $x^3 + px^2 + qx + r = 0$** (normovaný tvar rovnice), pak platí, že **kořen k dělí beze zbytku koeficient r** .

Př.:

Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici: $4x^3 - 8x^2 - 12x - 24 = 0$ o které víte, že má celočíselný kořen.

Nejprve rovnici upravíme tak, aby koeficient u kubického členu byl koeficient 1.

Dostaneme rovnici $x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = 0$. Kořen musí dělit číslo -6 . Dělitelé -6 : $\pm(3, 2, 1)$.

Postupně je budeme dosazovat do rovnice a zkoušet, který z nich to je. Nakonec zjistíme, že kořenem je číslo -2 .

Známe-li kořen -2 , vydělíme kubický čtyřčlen lineárním výrazem $x + 2$.

$$x^3 - 2x^2 - 3x - 6 : x + 2 = x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 2x^2 - 3x - 6 = (x + 2)(x^2 - 3)$$

Zbývá vypočítat, zda existují, a jaké jsou zbývající kořeny. Na první pohled je ale vidět, že to budou čísla $\pm\sqrt{3}$. Tedy $K = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$.

Většina, ale nikoliv všechny kubické rovnice má jen celočíselný kořen. Bohužel některé rovnice se nedají upravit do tvaru s koeficientem 1 u kubického členu a celočíselným absolutním členem, a proto se občas vyplatí zkusit tento kořen „uhádnout“ vyzkoušením čísel $-2, -1, 1, 2$ apod.

4) Obecná kubická rovnice

$$y_1 = u + v$$

- řeší se pomocí **Cardanových vzorců**: $y_2 = u \cdot \varepsilon + v \cdot \varepsilon^2$

$$y_3 = u \cdot \varepsilon^2 + v \cdot \varepsilon$$

ε ... libovolná primitivní 3. odmocnina z 1

- redukovaný tvar kubické rovnice: $y^3 + py + q = 0$
- postup pro odvození Cardanových vzorců zdlouhavý...začíná se substitucí v obecné rovnici za $x=y+m$...substituce $m=-a_2/3a_3$ – vypadne y^2 substituce $y=u+v$ (chceme použít Vietovy vzorce a vytvořit kvadratickou rovnici) ...
- diskriminant kubické rovnice Δ ... $\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$

$\Delta > 0$... 1 reálný kořen + 2 komplexně sdružené kořeny

$\Delta < 0$... 3 různá reálná řešení

$\Delta = 0$... 2 řešení, ale jedno je dvojnásobné z R

D) BIKVADRATICKÉ

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

- řeší se pomocí **substituce** $x^2 = y$
- dostaneme kvadratickou rovnici, kterou umíme řešit; poté nesmíme zapomenout dosadit do substituce a spočítat kořeny
-

Př.:

$$x^4 + x^2 - 6 = 0$$

$$K = \{\pm \sqrt{2}\}$$

E) BINOMICKÉ

$$x^n - a = 0 \quad \text{kde } a \neq 0, n \geq 1, \text{ řešením je } n\text{-tá odmocnina z } a$$

- řeší se v oboru komplexních čísel
- binární rovnice n -tého stupně má n různých řešení
- řešení rovnice lze najít zkoumáním goniometrického tvaru komplexního čísla.

Mějme rovnici v základním tvaru. Nejdříve vyjádříme komplexní číslo a v goniometrickém tvaru:

$$a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

řešení pak dostaneme ve tvaru: $x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$

Speciální případy – n-té odmocniny z 1:

$$1) x^3 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0$$

$$\alpha_1=1, \alpha_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha_3=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2) x^4 - 1 = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)=0$$

$$\alpha_1=1, \alpha_2=-1, \alpha_3=i, \alpha_4=-i$$

Př.: $x^4 + 16 = 0$ - dosazení do goniometrického tvaru: ($a = |a|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$)

$$x^4 = -16$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{|z|} = \frac{-16}{16} = -1$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{|z|} = \frac{0}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 180^\circ$$

$$x_k = \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), (k = 0, \dots, n-1)$$

$$x_0 = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{180 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} + i \sin \frac{180 + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{4} \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i \quad \dots \quad 1.\text{kořen}$$

$$x_1 = \dots$$

$$x_2 = \dots$$

$$x_3 = \dots$$

F) RECIPROKÉ ROVNICE

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 = 0$$

- pokud $a_k = a_{n-k}$ – rovnice I. druhu, lichého i sudého stupně, kořen -1

$$- \quad -5x^3 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$- \quad 2x^4 - x^3 - 3x^2 - x + 2 = 0$$

- pokud $a_k = -a_{n-k}$ – rovnice II. druhu, lichého i sudého stupně, kořen 1

$$- \quad -4x^4 + 2x^3 - 2x + 4 = 0 \dots \text{recip. rov. II. druhu sudého stupně musí mít prostřední člen s koeficientem 0}$$

- reciproké rovnice nemají kořen 0! (protože každá obsahuje nenulový absolutní člen)
- pokud je kořen číslo c, potom je kořenem i c^{-1}

Transcendentní rovnice

- nealgebraické rovnice jsou rovnice s transcendentní funkcí. Jsou to např. exponenciální, logaritmické, goniometrické, rovnice s neznámou pod odmocninou.

A) LOGARITMICKÉ ROVNICE

- je rovnice, v níž se vyskytuje neznámá v logaritmickém výrazu. Obecně lze logaritmické rovnice řešit jen graficky nebo přibližnými numerickými metodami. Jen v některých jednoduchých zvláštních případech lze tyto rovnice převést vhodnou substitucí na algebraické rovnice.

Základní logaritmická rovnice:

$$\log_a x = b, \quad a > 0, a \neq 0 \text{ („logaritmus čísla } x \text{ o základu } a\text{“)}$$

Logaritmus čísla x o základu a je takové číslo b , pro které platí $a^b = x$.

Logaritmus o základu 10 obvykle označujeme jako dekadický logaritmus. Nepíšeme, nečteme.

Logaritmus o základu e – přirozený logaritmus $\ln x$ ($\log_e x$).

Pro řešení logaritmických rovnic využíváme vzorce a věty pro počítání s logaritmy:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \text{ kde } a > 0, a \neq 1 \text{ a } x \text{ náleží } R^+$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \cdot \log_a x$$

$$\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^x = x$$

$$a^{\log_a r} = r$$

B) EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

- je rovnice, kde neznámá je v exponentu – může tedy vypadat následovně: $4^x = 16$. Určit neznámou v tomto případě by se mělo podařit všem z hlavy – $x=2$, ale jsou rovnice, kde toto nejde, např.

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} = 125.$$

Při řešení exponenciálních rovnic se snažíme upravit obě strany na stejné základy. Pokud se nám to povede, můžeme rovnici změnit tak, že si položíme rovny exponenty. Pokud to nelze musíme rovnici logaritmovat.

Př.:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{5-2x} = 81$$

$$3^{-5+2x} = 3^4$$

$$-5 + 2x = 4$$

$$2x = 9$$

$$x = 4,5$$

Vzorce pro řešení exponenciálních rovnic:

1) Rovnice převedeme do tvaru, aby se základy sobě rovnaly.

$$a^x = a^y$$

$$x = y$$

2) Pokud převod do exponenciálního tvaru není možný, musíme logaritmovat.

$$\log a^x = \log b^y$$

$$x \cdot \log a = y \cdot \log b$$

3) Řešení exponenciálních rovnic pomocí substituce.

V některých případech si můžeme exponenciální rovnici zjednodušit pomocí substituce.

$$5^{2x} + 5^x - 6 = 0$$

nyní provedeme substituci $a = 5^x$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

a z této kvadratické rovnice spočítáme kořeny 2 a -3, kořeny zpětně dosadíme: $2 = 5^x$, rovnici zlogaritmuje: $\log 2 = x \cdot \log 5$

$$x = \frac{\log 2}{\log 5}.$$

Pro kořen -3 nepočítáme, záporný logaritmus neexistuje.

Užitečné vzorce pro řešení exponenciálních rovnic:

$$a^1 = a \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$a^0 = 1 \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$a = \frac{1}{a^{-1}}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

C) GONIOMETRICKÉ ROVNICE

- je tehdy, pokud je neznámá v goniometrické funkci. Gon. funkce se nazývá skupina funkcí velikosti úhlu používaných například při zkoumání trojúhelníků a periodických jevů.

Gon. funkce jsou základem goniometrie. Obvykle se definují jako poměr dvou stran pravoúhlého trojúhelníka nebo délky určitých částí úseček v jednotkové kružnici.

1) základní goniometrické rovnice:

a) typ $f(x)=c$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = 30^\circ$$

$$x_2 = 150^\circ$$

b) typ $f(x+d)=c$

c) typ $f(n \cdot x+d)=c$

2) složitější goniometrické rovnice:

a) obsahují jen 1 goniometrickou funkci

b) goniometrické rovnice obsahující více goniometrických funkcí se musí zjednodušit pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi tak, aby obsahovaly jen jednu funkci

c) goniometrické rovnice řešené pomocí vzorců

D) IRACIONÁLNÍ ROVNICE (rovnice s neznámou pod odmocninou)

- základní ekvivalentní úprava - umocnění obou stran rovnice na druhou

Tato úprava je ekvivalentní pouze, když obě strany rovnice mají stejné znaménko. Pokud ale toto nebudeme u řešených rovnic schopni zajistit a použijeme-li přesto tuto úpravu, může se stát, že získáme rovnici, která už nebude ekvivalentní s původní. Kořeny původní rovnice budou kořeny i nadále, ale je možné, že rovnice, kterou získáme po umocnění bude mít ještě nějaké kořeny navíc. Bude tedy nezbytně nutné, abychom po jejich vypočtení, provedli zkoušku, kterou si správnost vypočtených hodnot ověříme.

Po umocnění rovnice se nám podaří buď odmocnin úplně zbavit a dostaneme např. lineární, či kvadratickou rovnici, nebo nám nějaké neznámé pod odmocninami zůstanou a budeme umocňováním řešit další iracionální rovnici.

Nezapomeňte, že druhá odmocnina je definovaná jen pro nezáporná reálná čísla. Pokud se tedy pod odmocninou vyskytuje výraz s neznámou x , výrazně to ovlivní definiční obor rovnice.

Diofantovské rovnice

- diofantovské rovnice jsou rovnice o dvou nebo více neznámých s doplňujícím předpokladem, že jejich řešením jsou jen celá čísla.
- dio. rov. se poprvé objevují jako matematizace některých slovních úloh ve 4. a 5. ročníku ZŠ, ovšem řeší se pouze v oboru čísel přirozených.

Pozn. Diofantos z Alexandrie byl řecký matematik žijící přibližně v polovině 3. století našeho letopočtu. Zasloužil se o rozvoj matematiky především tím, že napsal jedno z nejlepších děl tehdejší doby „Aritmetika“. Zde důsledně používal matematických značek a mimo jiné zde popsal řešení zmíněných rovnic.

Motivační příklad jednoduché diofantovské rovnice

Honza měl ve stavebnici 19 koleček. Všechna tato kolečka použil při stavbě tříkolek a koloběžek. Kolik sestavil koloběžek a kolik tříkolek? Najdete všechna řešení?

- experimentální řešení:

Děti si zakreslí značky odpovídající 19 kolečkům ve stavebnici. Tyto značky sdružují do skupin po dvou a třech tak, aby každá značka byla použita právě jednou a aby vyčerpaly všechny značky.

- algebraické řešení:

$$3x + 2y = 19 \quad \dots \quad \text{diofantovská rovnice}$$

$$2y = 19 - x$$

$$x=15, y=2$$

- zápis řešení pokusem:

zvolené x	1	2	3	4	5	6	7
3x	3	6	9	12	15	18	21
zbude na 2y	16	13	10	7	4	1	-2
x	8	-	5	-	2	-	-

V tabulce jsme objevili pravidelnost: nalezneme-li dvě dvojice čísel, která jsou řešením dané diofantovské rovnice, dovedeme již najít všechna ostatní řešení

Diofantovskou rovnici $3y + 2x = 19$ můžeme chápat jako rovnici přímky znázorněné v I. kvadrantu celočíselného souřadnicového systému. Nalezená dvě řešení $[1, 8]$, $[3, 5]$ jsou souřadnice bodů, které přímku určují.

Diofantovská rovnice je algebraická úloha řešená v oboru všech celých čísel. Obecný tvar: $ax + by = c$, kde a, b, c jsou daná celá čísla a x, y jsou neznámá celá čísla.

Řešitelnost diofantovských rovnic v oboru celých čísel

Aby diofantovská rovnice $ax + by = c$ byla řešitelná, **musí být $D(a,b)$ dělitelem čísla c .**

Př.: Rovnice $2x + 2y = 9$ není řešitelná. Její levá strana je určitě dělitelná dvěma, ale pravá strana je číslo liché.

Úloha: Sestavte diof. rovnici $ax + by = c$ tak, aby

- a) byla neřešitelná
- b) byla řešitelná v oboru všech přirozených čísel
- c) nebyla řešitelná v oboru přirozených čísel, ale byla řešitelná v oboru všech celých čísel

Výpočet jednoho řešení diofantovské rovnice (výchozí řešení)

Př. Je dána rovnice $4x + 6y = 50$. Najděte jedno její řešení. (1)

ověření řešitelnosti rovnice: $4x + 6y = 50$

$$D(4, 6) = 2 \quad 2/50 \quad \text{úloha je řešitelná}$$

metoda dosazovací:

- rovnici upravíme tak, aby každá její strana obsahovala jednu neznámou
- za x systematicky dosazujeme celá čísla až na levé straně dostaneme celočíselný násobek čísla y
- z porovnání odpovídajících rovnic určíme x a y

$$6y = 50 - 4x$$

$$2 = 50 - 48$$

$$6 = 50 - 44 \qquad 6y = 6 \qquad 4x = 44$$

$$y = 1 \qquad x = 11$$

Ostatní řešení diof. rovnice (obecné řešení)

Jestliže dvojice čísel x_0 a y_0 je řešením dané diof. rovnice, pak všechny dvojice čísel

$$x = x_0 + bk$$

$$y = y_0 - ak \quad \text{kde } k \text{ je libovolné celé číslo}$$

jsou řešením dané diofantovské rovnice.

Odůvodnění:

$$ax + by = c \quad (\text{dosadíme za } x, y)$$

$$a(x_0 + bk) + b(y_0 - ak) = c$$

$$ax_0 + abk + by_0 - abk = c$$

$$ax_0 + by_0 = c \quad (\text{dvojice } x_0, y_0 \text{ vyhovuje})$$

$$\text{obecné řešení rovnice (1)} \quad x = x_0 + 6t$$

$$y = y_0 - 4t$$

$$\text{např. } t = 2$$

$$x = 11 + 6 \cdot 2 \quad y = 1 - 4 \cdot 2$$

$$x = 23 \quad y = -7$$

$$\text{Zk. } 4 \cdot 23 - 6 \cdot 7 = 50$$

Př.: Paní učitelka má k dispozici 50 Kč na karneval. Chce nakoupit lízátko po 2,60Kč a 1,80Kč. Jaké má možnosti pro uskutečnění nákupu, chce-li vyčerpat všechny peníze?

Typy rovnic ve školské matematice, metody jejich řešení

Na ZŠ se probírají lineární a kvadratické rovnice.

Lineární rovnice (v součinném tvaru, zlomku, využívání desetinných i záporných čísel)

$$1. \quad 3a + 2 = 2a + 10$$

$$2. \quad 3(10 - 2y) - 12 + 2(3y - 4) = 0$$

$$3. \quad 0,2y(y - 1) = -0,4(y + 1) - (1 - y)$$

Kvadratické rovnice (v podílovém a součinném tvaru)

$$1. \quad \frac{1}{x-1} = \frac{2}{x-2}$$

$$2. \quad (x-1)(x+4) = 0$$

$$3. \quad x^2 + 49 = 14x$$

Soustavy lineárních rovnic

$$3x + 2y = 46$$

$$2x + 3y = 49$$

K řešení soustavy rovnic ožívají žáci především sčítací, dosazovací nebo srovnávací metody.

Př.: 5 kg jablek a 3 kg banánů stojí 146 Kč. 2 kg jablek a 5kg banánů stojí 142Kč. Vypočítej, kolik stojí kg jablek a banánů.

A4. Binární relace, zobrazení a funkce v matematice ZŠ. Vlastnosti, typy, příklady.
Lineární, kvadratická funkce. Goniometrické funkce. Způsoby zadávání ve školské
matematice.

Kartézský součin

Kartézský součin množin $A \times B$ je množina všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$, $b \in B$.

$$A \times B = \{[a, b]: a \in A, b \in B\}$$

- Kartézský součin lze definovat obecně pro n množin $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ – množina uspořádaných n -tic.
- Jestli-že se množina $B=A$, pak kartézský součin $A \times B$ nazveme kartézskou mocninou.

Př.: Kartézský součin množin $A=\{a_1, a_2, a_3\}$, $B=\{b_1, b_2\}$ se rovná:

$$A \times B = \{[a_1, b_1], [a_1, b_2], [a_2, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_1], [a_3, b_2]\}$$

Vlastnosti KS:

- KS není komutativní, tzn. $A \times B \neq B \times A$
- KS není operace asociativní
- KS je distributivní vzhledem ke sjednocení a průniku množin

Grafické znázornění KS:

kartézský, šachovnicový, uzlový

Binární relace

Binární relace R nad množinami A, B je podmnožina kartézského součinu: $R \subseteq A \times B$.

Přípravná úloha: Uveďme případ rodin s těmito členy: matka, otec, syn Pavel, syn David, dcera Helena.
pro naše účely je označíme malými písmeny:

matka ... m , otec ... o , Pavel ... p , David ... d , Helena ... h .

Budeme tedy pracovat s množinou $\{m, o, p, d, h\}$, označme ji M . Uveďte všechny uspořádané dvojice $[x, y]$ prvků x, y množiny M , pro které platí, že x je synem y .

Řešení: Zřejmě se jedná o tyto uspořádané dvojice:

$[p, m]$, protože „ p je synem m “ tj. Pavel je synem matky

$[p, o]$, protože „ p je synem o “ tj. Pavel je synem otce

$[d, m]$, protože „ d je synem m “ tj. David je synem matky

[d, o], protože „d je synem o“ tj. David je synem otce.

Vztah „být synem“ je zde „reprezentován“ právě uvedenými čtyřmi uspořádanými dvojicemi. Množina $\{[p, m], [p, o], [d, m], [d, o]\}$ tedy v našem případě představuje příbuzenský vztah „být synem“ v množině M. **Pro vztah použijeme cizí slovo relace.** Protože se jedná o množinu uspořádaných dvojic, budeme ji nazývat **binární relace**.

Definice:

Binární relace v množině M je množina, která je podmnožinou kartézského součinu $M \times M$. Množinu dětí v přípravné úloze označme A, tedy $A = \{p, d, h\}$ a množinu rodičů označme B, tedy $B = \{o, m\}$. Potom relace „být synem“ je podmnožinou kartézského součinu $A \times B$.

Čím je binární relace určena?

1. výčtem všech svých uspořádaných dvojic
2. charakteristickou vlastností všech uspořádaných dvojic

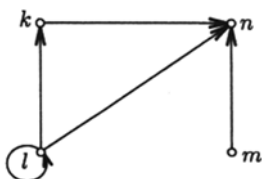
Př.: Je dána množina $M = \{1, 2, 3\}$. Vztah mezi čísly je, že x je menší než y. Zapište tento vztah jako relaci R, tj. množinu R všech uspořádaných dvojic (x,y) z kartézského součinu $M \times M$:

1. výčet prvků ... $R = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}$
2. charakteristická vlastnost ... $R = \{(x,y) \in M \times M, x < y\}$

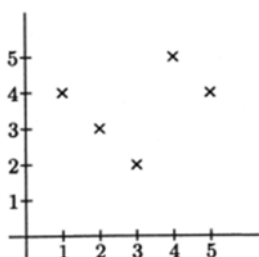
Zobrazení binárních relací

Uzlový graf

V tomto grafu zobrazujeme prvky množiny M_1, M_2 jako body v rovině, tzv. uzly. Pokud $(a,b) \in R$ vyznačíme šipku jdoucí z bodu a do bodu b. Pokud $M_1 = M_2 = M$, stačí zobrazit jednotlivé prvky M pouze jednou. V tomto případě, pokud $(a, a) \in R$, nazýváme šipku smyčkou.



Kartézský graf



Základní vlastnosti binárních relací

a) Relace R je **reflexivní**: Každý prvek je v relaci sám se sebou. $\forall x (R(x,x))$ (Relace R je **ireflexivní**: $\forall x (\neg R(x,x))$)



b) Relace R je **symetrická**: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý je v relaci s prvním.

$$\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow R(y,x)]$$

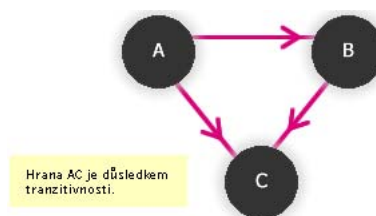


c) Relace R je **anti-symetrická**: Je-li první v relaci s druhým a druhý je v relaci s prvním, pak první je identický s druhým. $\forall x \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow x=y]$ symetrie nenastane

d) Relace R je **asymetrická**: Je-li první v relaci s druhým, pak druhý není v relaci s prvním:

$$\forall x \forall y [R(x,y) \rightarrow \neg R(y,x)]$$

e) Relace R je **transitivní**: Je-li první v relaci s druhým a druhý v relaci s třetím, pak první je v relaci s třetím.



$$\forall x \forall z \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)]$$

f) Relace R je **cyklická**: Je-li první v relaci s druhým a druhý se třetím, pak třetí je v relaci s prvním. $\forall x \forall z \forall y [(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(z,x)]$

g) Relace R je **(lineární) souvislá, konektivní**: Je-li první v relaci se druhým nebo je druhý v relaci s prvním nebo jsou identické. $\forall x \forall y [(R(x,y) \vee R(y,x) \vee x=y)]$

Typické příklady vlastností:

Reflexivita znamená, že je prvek v relaci sám se sebou. Typickým příkladem je rovnost.

Pokud máme definovanou rovnost na přirozených číslech, jistě platí, že pro jakýkoli prvek a: $a = a$.

Dalším příkladem může být dělitelnost. Tam opět platí, že číslo a je dělitelné samo sebou, tedy dvojice $[a,a]$ je v relaci dělitelnosti (sedmička dělí sedmičku).

U **symetrické** relace platí, že pokud je v relaci nějaká dvojice, pak je v relaci i inverzní dvojice.

Například relace být sourozencem. Pokud je Honza sourozenec Jany, pak je i Jana sourozencem Honzy.

Z číselných relací by to mohla být relace „býti opačným číslem“.

Klasickým příkladem **antisymetrické** relace je menší nebo rovno. Antisymetrie nám říká, že pokud jsou prvky $[a,b]$ a $[b,a]$ v relaci, pak jediné, když jsou si rovny, $a=b$. Relace menší nebo rovno to splňuje. Kdy

platí $a \leq b$ a zároveň $b \leq a$? Jedině v případě, že $a = b$. Když dosadíme: platí $3 \leq 5$ a zároveň $5 \leq 3$? Ne. Ale platí $4 \leq 4$ a zároveň $4 \leq 4$.

Transitivní je relace menší než. Transitivní nám říká, že pokud $3 < 4$ a zároveň $4 < 5$, tak potom musí jistě platit i $3 < 5$. Pro spoustu relací je to poměrně přirozená vlastnost. Podobně pro příklad se stejnou délkou slov. Pokud jsou v relaci [sekera, sobota] a jsou v relaci [sobota, poleno], pak jsou v relaci i slova [sekera, poleno].

Příklad:

Sestrojte binární relaci v množině $M = \{a, b, c, d\}$ tak, aby byla:

- reflexivní – musí obsahovat všechny uspořádané dvojice $[a, a], [b, b], [c, c], [d, d]$
- antireflexivní – nesmí obsahovat žádnou uspořádanou dvojici stejných prvků
- symetrická – pokud je prvkem relace určitá uspořádaná dvojice, musí této relaci patřit i dvojice k ní “obrácená”, např. $\{ab, ad, cc, ba, da\}$
- antisymetrická – nesmí k žádné uspořádané dvojici různých prvků obsahovat uspořádanou dvojici obrácenou, např. $\{ac, dc, bc\}$
- tranzitivní – pokud obsahuje takové uspořádané dvojice, že druhá složka jedné z nich je první složkou druhé, pak musí též obsahovat takovou uspořádanou dvojici, že její první složkou je první složka uspořádané dvojice a druhou složkou druhá složka druhé, např. $\{ba, ad, bd, ca, cd\}$
- konektivní – relace musí obsahovat aspoň jednu z uspořádaných dvojic, které lze ze dvou prvků vytvořit, např. nejmenší co lze vytvořit: $\{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$

Doplňková relace

Všechny uspořádané dvojice $(x, y) \in M \times M$, které nepatří do R , tvoří také relaci, kterou značíme R' a nazýváme doplňkovou.

Inverzní relace

Nechť R je binární relace z A do B . $R^{-1} = \{[x, y] \in B \times A : [y, x] \in R\}$. Inverzní relace R^{-1} k relaci R je množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ kartézského součinu $B \times A$, pro které platí, že $[y, x]$ je prvkem relace R .

Obory binárních relací

Nechť je daná relace R v KD $M \times M$. Množina, kterou označíme $L(R)$, všech prvků $x \in M$, které jsou prvními složkami uspořádaných dvojic, které patří relaci R se nazývá levý (může se říci první) obor relace. Zápis $L(R)$ čteme: levý obor relace.

Nechť je daná relace R v $KD M \times M$. Množina, kterou označíme $P(R)$, všech prvků $y \in M$, které jsou druhými složkami uspořádaných dvojic, které patří relaci R se nazývá pravý (může se říci druhý) obor relace. Zápis $P(R)$ čteme: pravý obor relace.

Relace ekvivalence: E

Relace R definována na množině M se nazývá relace ekvivalence právě tehdy a jen tehdy, když je **reflexivní, symetrická a tranzitivní**.

Příklad:

Zjistěte, zda rovnost v množině všech zlomků, jejichž čitatelem je kterékoliv celé číslo a jmenovatelem kterékoliv nenulové celé číslo, je relace typu ekvivalence.

Řešení:

Ze zkušenosti s počítáním se zlomky víte zcela samozřejmě, že každý zlomek je roven sám sobě, to znamená, že rovnost zlomků je reflexivní relace. Dále rovněž znáte, že pro každé dva zlomky platí: je-li jeden z nich roven druhému, je samozřejmě i druhý z nich roven prvnímu (např. jsou-li dvě třetiny rovny šesti devítinám, je určitě šest devítin rovno dvěma třetinám), tedy tato relace je zřejmě symetrická. Naše představy a zkušenost nám také napovídají, že pro každé tři zlomky platí: je-li první z nich roven druhému a druhý třetímu, můžeme se spolehnout, že i první z nich se rovná třetímu, čili rovnost zlomků je zřejmě relace tranzitivní.

Rozklad množin u ekvivalentních relací:

Def.: Rozklad neprázdné množiny M je množina takových neprázdnych podmnožin množiny M , že každý prvek množiny M náleží právě jedné z nich. Podmnožiny množiny M , uvedené v definici rozkladu množiny se nazývají **třídy rozkladu** množiny M .

Z definice rozkladu vyplývá, že (pokud má rozklad množiny M aspoň dvě třídy), pak:

- průnikem každých dvou tříd rozkladu je prázdná množina, tj. žádné dvě třídy rozkladu nemají společný prvek
- sjednocením všech tříd rozkladu je množina M

Příklad:

Mějme ekvivalenci R definovanou na N . $[a,b] \in R$ právě tehdy když a i b je liché nebo a i b je sudé.

Např. $[1,7],[11,3],[4,6]$.

Rozklad této ekvivalence na třídy ekvivalence?

Čemu bude rovna třída $N[1]$? Musíme najít všechny čísla ekvivalentní s číslem jedna, jsou to všechny lichá čísla, takže $N[1] = \{1, 3, 5, \dots\}$.

Čemu bude rovna třída $N[2]$? Nalezneme všechna čísla ekvivalentní s dvojkou, to jsou čísla sudá, $N[2] = \{2, 4, 6, \dots\}$.

Nyní $N[3]$. Jaká čísla jsou ekvivalentní s trojkou? Čísla lichá. Atd. Čili tyto dvě množiny tvoří rozklad ekvivalence.

Podobný případ by byl např. ekvivalence na množině lidí, kde a i b je muž nebo a i b je žena. Pak bychom jako rozklad dostali množinu žen a množinu mužů.

Relace uspořádání. U

Relace R definovaná v množině A se nazývá relací uspořádání právě tehdy, když je **antisymetrická a tranzitivní**.

Relace R definovaná v množině A se nazývá:

- relací ostrého uspořádání, když je antisymetrická, tranzitivní a antireflexivní
- relací neostrého uspořádání, když je antisymetrická, tranzitivní a reflexivní
- relací lineárního uspořádání, když je antisymetrická, tranzitivní a konektivní

Relace R definovaná v množině A se nazývá relací ostrého lineárního uspořádání, když je antireflexivní, antisymetrická, tranzitivní a konektivní.

Relace R definovaná v množině A se nazývá relací neostrého lineárního uspořádání, když je reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a konektivní.

Zobrazení: Z

Podstatou zobrazení je proces přiřazování, který je nejčastěji dán jistým předpisem, popisující vztah mezi prvky z definičního oboru zobrazení Z a prvky oboru hodnot.

- zobrazení, jehož def. oborem i oborem hodnot je množina reálných čísel se nazývá funkce jedné reálné proměnné
- zobrazení je relace, která se skládá ze všech uspořádaných dvojic, které mají na prvním místě libovolný prvek z def. oboru a na druhém místě jeho obraz

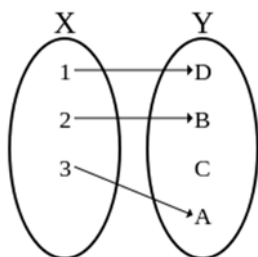
Def.: Relace Z z množiny A do množiny B ($Z \subset A \times B$) se nazývá zobrazení z množiny A do množiny B právě tehdy, když je splněna podmínka:

$$\forall a \in A \forall b_1, b_2 \in B: [(a, b_1) \in Z \wedge (a, b_2) \in Z] \rightarrow b_1 = b_2$$

Tzn., že ke každému prvku $a \in A$ existuje nejvýše jeden prvek $b \in B$ takový, že platí $(a, b) \in Z$. Prvek $a \in A$ nazýváme vzorem a prvek $b \in B$ jeho obrazem, je-li relace Z zobrazení.

První obor relace $O_1(Z)$, která je zobrazením z množiny A do množiny B nazýváme definičním oborem; druhý obor $O_2(Z)$ této relace pak oborem hodnot.

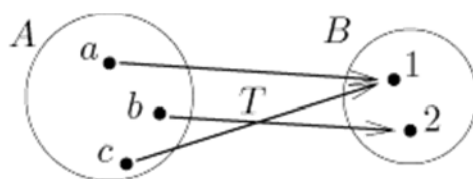
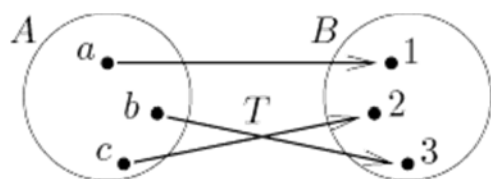
Schematické znázornění relace zobrazení Z z množiny A do množiny B : (prosté)



Schematické znázornění dalších případů:

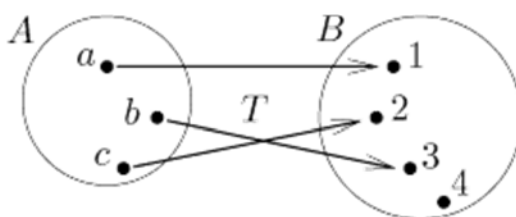
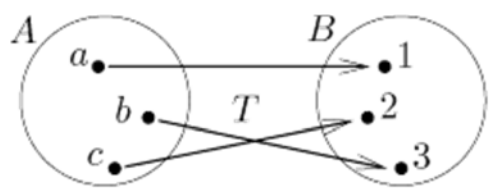
- zobrazení Z z množiny A na B

(surjekce)



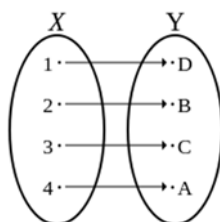
- zobrazení Z množiny A do B

(injekce) - prosté



- zobrazení Z množiny A na množinu B
prosté a “na“

(bijekce) – vzájemně jednoznačné, jestliže Z je



Vlastnosti zobrazení:

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je **surjekce** (zobrazení A na B), jestliže k libovolnému $b \in B$ existuje $a \in A$ takový, že $f(a) = b$ (každý prvek b má alespoň jeden vzor)

Zobrazení $f : A \rightarrow B$ je **injekce** (prosté zobrazení A do B), jestliže pro všechna $a \in A$, $b \in B$ taková, že $a \neq b$ platí, že $f(a) \neq f(b)$ (každý prvek b má právě 1 vzor)

Zobrazení $f: A \rightarrow B$ je **bijekce** (prosté zobrazení A na B), jestliže f je surjekce a injekce. Existuje-li mezi množinami A, B bijekce, pak říkáme, že mají stejnou kardinalitu (počet prvků).

Zobrazení Z z množiny A do množiny B se nazývá **prosté**, právě když Z^{-1} je zobrazení z množiny B do množiny A. Toto zobrazení Z^{-1} nazýváme inverzním zobrazením k zobrazení Z.

V praxi se zpravidla využívá podmínky: Zobrazení Z z množiny A do množiny B je prosté, jestliže pro každé $y \in B$ platí, že je obrazem nejvýše jednoho prvku $x \in A$. Případně, mají-li v zobrazení Z každé dva různé prvky definičního oboru různé obrazy.

Prosté zobrazení Z množiny A na množinu B nazýváme také vzájemně jednoznačným zobrazením.

Zobrazení je **prosté**, právě když různým vzorům přiřazuje různé obrazy.

Funkce

- je předpis, který ke každému číslu z množiny A přiřadí právě jedno reálné číslo.

Mějme dvě množiny reálných čísel A a B. Pokud každému číslu $x \in A$ přiřadíme **právě jedno** reálné číslo $y \in B$, které označíme $y=f(x)$, pak množinu uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$ nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné x**.

Jinak: Pravidlo f, které každému prvku množiny A přiřadí jediný prvek množiny B se nazývá funkce. Zapisujeme $f: A \rightarrow B$. Prvku x je přiřazen prvek y: $f(x)=y$, **y je obrazem** prvku x při zobrazení f (**x je vzorem** prvku b při zobrazení f).

Definiční obor D – množina A

Obor hodnot H - množina všech y, $y \in R$, ke kterým existuje právě jedno x, $x \in R$ tak, že $y=f(x)$

Nezávisle proměnná – x, **závisle proměnná** - y

Graf fce – množina všech uspořádaných dvojic $[x, y]$.

Vlastnosti funkce

Funkce prostá

- funkce f je prostá právě tehdy, když pro každé $x_1, x_2 \in R$ platí: jestliže $x_1 \neq x_2$, pak $f(x_1) \neq f(x_2)$
- tzn. každý obraz má jen jediný vzor

Parita

- fce je sudá, pokud platí: $f(-x)=f(x)$... graf souměrný podle osy y
- fce je lichá, pokud platí: $f(-x)=-f(x)$... graf souměrný podle počátku S[0,0]

Periodičnost fce

- fce je periodická, existuje-li kladné číslo p , takové, že: je-li $\forall x \in D$, je i $x+p \in D$ a $f(x)=f(x+p)$
- nejmenší číslo p s touto vlastností nazýváme (nejmenší) periodou
- graf periodické funkce se pravidelně (periodicky) opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě
- např. $y=\sin x$, $y=\cos x$

Ohraničenost

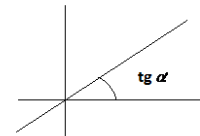
- **shora omezená**, existuje-li číslo $h \in \mathbb{R}$, takové, že pro každé $x \in D$ platí, $f(x) \leq h$
 - o **maximum** v bodě a , pokud $\forall x \in D: f(a) \geq f(x)$
- **zdola omezená**, existuje-li číslo $d \in \mathbb{R}$, takové, že pro každé $x \in D$ platí, $f(x) \geq d$
 - o **minimum** v bodě b , pokud $\forall x \in D: f(b) \leq f(x)$
- omezená (ohraničená), je-li omezená zdola i shora

Monotonie

- nechť $M \subseteq D$ (M je podmnožinou def. o.)
- fce je na množině M **rostoucí**, právě tehdy, když $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2$, pak $f(x_1) < f(x_2)$
- fce je na množině M **klesající**, právě tehdy, když $\forall x_1, x_2 \in M: x_1 < x_2$, pak $f(x_1) > f(x_2)$
- řekneme, že fce f je na množině M (ryze) monotónní, je-li buď rostoucí, nebo klesající na M

Lineární funkce

- je každá funkce daná rovnicí $y=ax+b$ $a, b \in \mathbb{R}$
- **grafem je přímka** různoběžná s osou y
- $a = \operatorname{tg}(\alpha)$... a určuje směrnici funkce
 - o se zvětšující se hodnotou a se fce odklání od osy x
- $a > 0$... fce rostoucí
- $a < 0$... fce klesající
- b – reálné číslo
 - o posun grafu po ose y



Typy – speciální případy lin. fce:

- 1) **přímá úměrnost**: $y = ax$... grafem je přímka procházející počátkem
- 2) **konstantní funkce**: $y = b$... grafem je rovnoběžka s osou x procházející bodem $[0, y]$

Lineární lomená fce

- je dána rovnicí $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $x \neq -\frac{d}{c}$

- $D \in \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}, \quad c \neq 0, \text{ ad } -bc \neq 0$

- grafem je posunutá rovnosá hyperbola

PŘ: $y = \frac{k}{x} \dots$ **Nepřímá úměrnost**

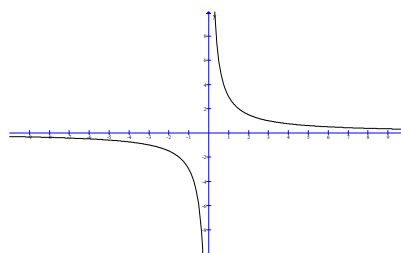
PŘ: $y = \frac{x+1}{x-2}$

$$(x+1):(x-2) = x-2(3)$$

Platí tedy $\frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$ a funkci g můžeme proto vyjádřit ve tvaru: $g: 1 + \frac{3}{x-2}$

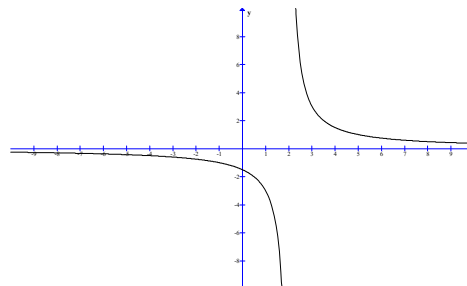
Nyní postupně sestrojíme graf fce:

$$g_1: y = \frac{3}{x}$$



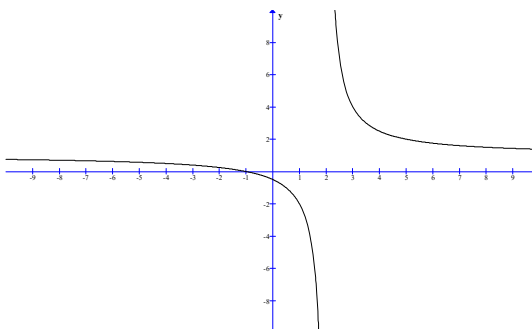
$$g_2: y = \frac{3}{x-2}$$

- danou hyperbolu posuneme o dvě jednotky doprava



$$g_3: y = 1 + \frac{3}{x-2}$$

- graf posunout o 1 nahoru



Kvadratická funkce

- je dána rovnicí: $y = ax^2 + bx + c$ koeficienty: $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$
- ax^2 = kvadratický člen, bx = lineární č., c = absolutní č.
- **grafem je parabola**, jejíž osa je rovnoběžná s osou y
- vrchol paraboly – maximum či minimum

o $V \left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right]$ nebo $V[m; n] \dots a.(x-m)^2.(x-n) = ax^2 + bx + c$

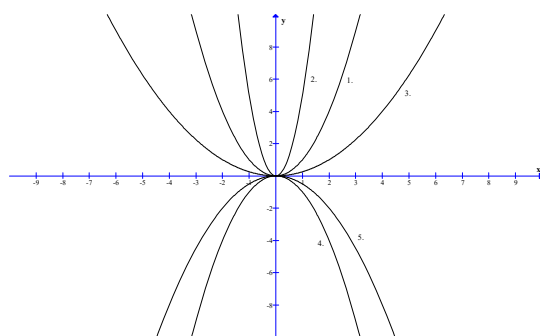
- a** - určuje zakřivení a znaménko “orientaci” paraboly
 - $a > 1$ (< -1) graf se zužuje, $a < 1$ (> -1) graf se rozšiřuje
 - $a > 0$ fce konvexní, $a < 0$ fce konkávní
- b** - směrnice tečny t k parabole sestrojené v průsečíku Y s osou y
 - $b > 0$ vrchol par. je vlevo od osy y , $b < 0$ vrchol vpravo od y , pro $b = 0$ je y osou paraboly (posuny ve směru záporné či kladné poloosy x)
- c** - představuje úsek na ose y vymezený průsečíkem Y paraboly se souřadnicovou osou y
 - posun grafu paraboly na ose y , $c > 0$ posun $\uparrow$, $c < 0$ posun $\downarrow$

Definiční obor fce je $\mathbb{R}$, obor hodnot závisí na konkrétní fci, ale vždy jde do (plus nebo minus)

nekonečna. Kvadratická fce je vždy v polovině intervalu rostoucí a v druhé polovině klesající. Pokud je lineární člen roven nule ($b = 0$), kvadratická fce je sudá. Kvadratická fce není prostá, je omezená. Pokud je $a > 0$: omezená zdola (konvexní), $a < 0$: omezená shora (konkávní).

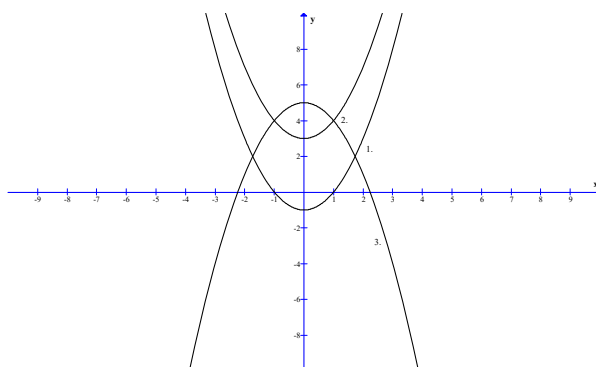
PŘ.:

1. $y = x^2$
2. $y = 5x^2$
3. $y = 1/4x^2$
4. $y = -x^2$
5. $y = -1/2x^2$



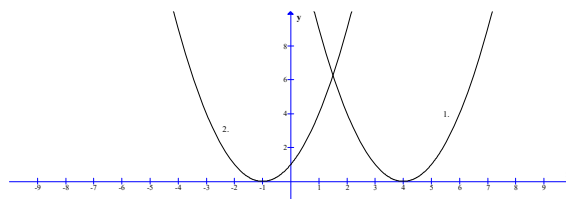
PŘ.:

1. $y = x^2 - 1$
2. $y = x^2 + 3$
3. $y = -x^2 + 5$

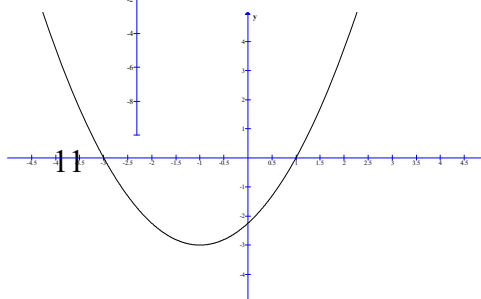


PŘ.: $y = (x-k)^2$

1. $y = (x - 4)^2$
2. $y = (x + 1)^2$



PŘ.: Sestroj graf $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$



+1: posun na ose x doleva o -1

-3: posun na ose y dolů o 3

V[-1,-3]

PŘ: Sestroj graf $y = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

- doplnění na druhou mocninu dvojčlenu:

$$\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right) - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \cdot (x^2 - 2x) - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \cdot (x^2 + 2x + 1) - \frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot (x+1)^2 - 3$$

V[-1, -3]

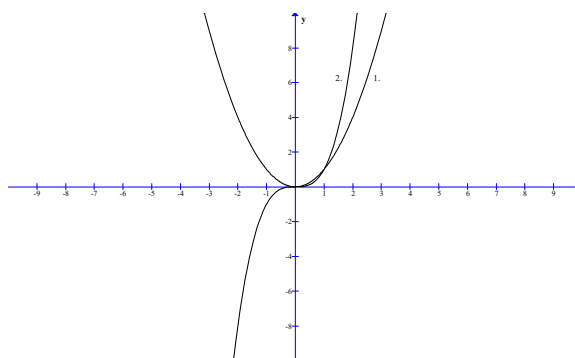
Pozn.

Mocninná fce

- rovnice ve tvaru $y = x^n$

1. $y = x^2$

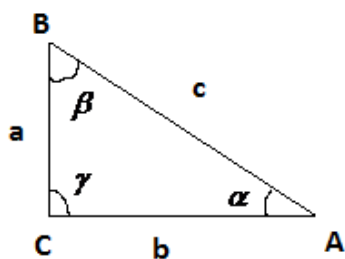
2. $y = x^3$



Goniometrické funkce

Goniometrické fce pracují s úhly v trojúhelníku.

Přestože goniometrické fce můžeme nějakým způsobem používat u jakéhokoliv trojúhelníku, často pracujeme pouze s pravoúhlým trojúhelníkem. Pravoúhlý trojúhelník je takový trojúhelník, který má jeden úhel pravý, tj. o velikosti 90 stupňů. Vypadá např. takto:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$
$$\cos \beta = \frac{b}{c} \quad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$$

sin – poměr délky protilehlé odvěsny k úhlu a délky přepony

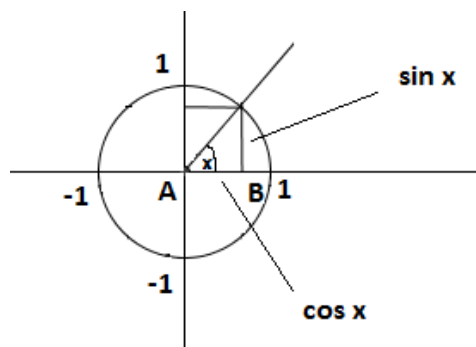
cos – přilehlá odvěsna : přepona

tg – protilehlá odvěsna : přilehlá odvěsna

cotg – přilehlá odvěsna : protilehlá odvěsna

Funkce sinus

Jednotková kružnice.



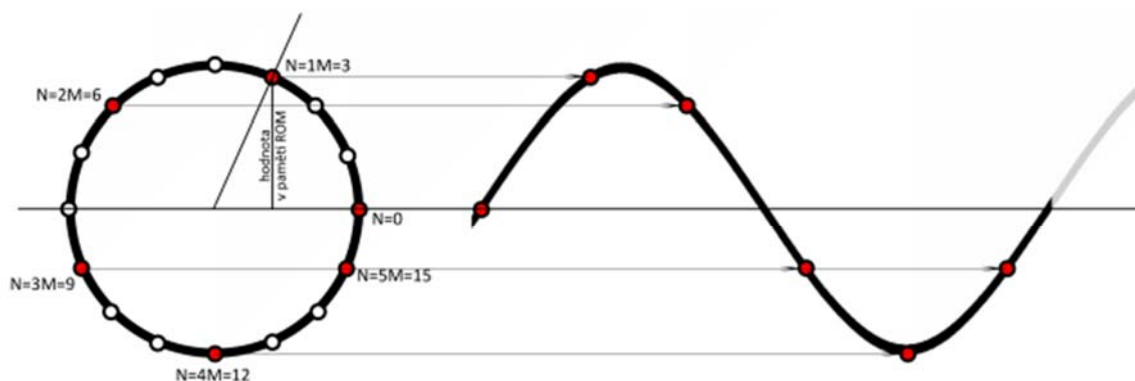
x ... velikost orientovaného úhlu, jehož počáteční rameno je polopřímka AB

Def.: Funkcí sinus se nazývá fce na množině $\mathbb{R}$, která je každému x náležícímu $\mathbb{R}$ přiřazena y-ová souřadnice průsečíku koncového ramene orientovaného úhlu o velikosti x s jednotkovou kružnicí.

Je definována buď na oboru reálných čísel anebo širěji na oboru komplexních čísel.

Sinus se jednoduše definuje na **jednotkové kružnici** (kružnici se středem v počátku a s poloměrem 1): pokud poloměr jednotkové kružnice svírá s osou x úhel α , je $\sin \alpha$ vzdálenost koncového bodu tohoto poloměru od osy x , jinak řečeno, délka kolmice spuštěné z tohoto bodu na osu x . Délka úsečky z počátku k patě této kolmice se rovná $\cos \alpha$. Poloměr, kolmice a tato úsečka tvoří pravoúhlý trojúhelník, pro nějž platí Pythagorova věta, takže také platí: $(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$.

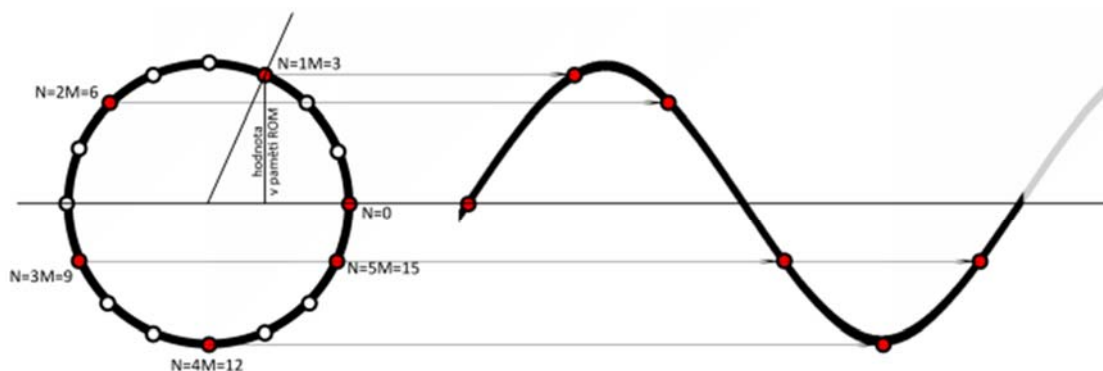
Na jednotkové kružnici je také vidět, že sinus je v prvním a druhém kvadrantu nezáporný (≥ 0), kdežto ve třetím a čtvrtém nekladný (≤ 0). V prvním a čtvrtém kvadrantu je rostoucí, ve druhém a třetím klesající.



-
- fce lichá, periodická s periodou $2k\pi$
- omezená shora i zdola, maximum v 1, minimum v -1
- $D_f = \mathbb{R}$
- $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- grafem sinusoida
- rostoucí $\left(-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi; \frac{1}{2}\pi + 2k\pi\right)$
- klesající $\left(\frac{1}{2}\pi + 2k\pi; \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$
- platí: $\sin(-x) = -\sin x$

Funkce cosinus

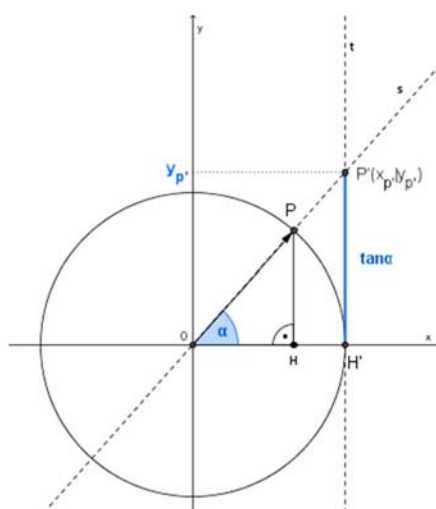
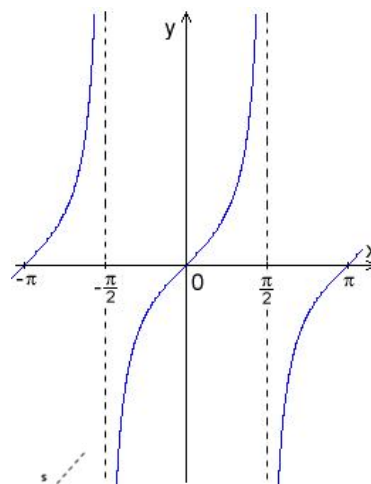
Def.: Funkce $\cos \alpha$ je definována jako x-ová souřadnice průsečíku P koncového ramene orientovaného úhlu α s jednotkou kružnicí.



- fce sudá, periodická s periodou $2k\pi$
- omezená shora i zdola, maximum v 1, minimum v -1
- $D_f = \mathbb{R}$
- $H_f = \langle -1, 1 \rangle$
- grafem kosinusoida
- rostoucí $(\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$
- klesající $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$
- platí: $\cos(-x) = \cos x$

Funkce tangens

- tangens je fce daná vztahem $y = \frac{\sin x}{\cos x}$
- grafem tangentoida
- perioda $k\pi$, není prostá, není omezená
- lichá
- $D = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$
- $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$
- $H = (-\infty, \infty)$
- rostoucí v každém intervalu:
- asymptota: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- derivace: $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- platí: $\tan(-x) = -\tan x$

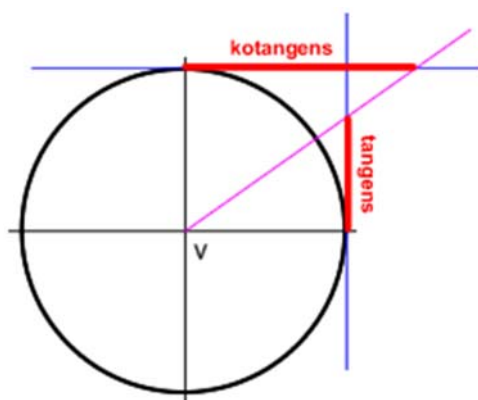
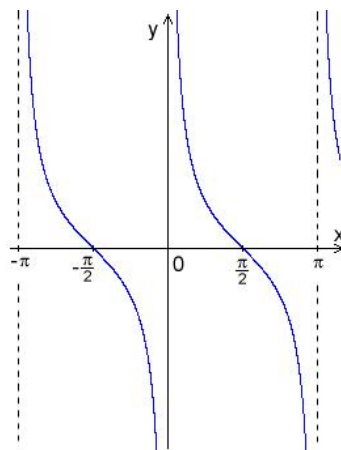


Funkce kotangens

- kotangens je funkce daná vztahem $y = \frac{\cos x}{\sin x}$

o je tedy převrácená k funkci tangens

- perioda $k\pi$
- grafem kotangentoida
- není prostá, není omezená
- lichá
- $D = \mathbb{R} - \{k\pi\}$
- $H = (-\infty, \infty)$
- klesající: $(0 + k\pi; \pi + k\pi)$
- derivace: $y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$
- platí: $\cot g(-x) = -\cot g x$



x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	nedef.	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{cotg} x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	nedef.

Konstrukce grafů goniometrických funkcí (sin, cos)

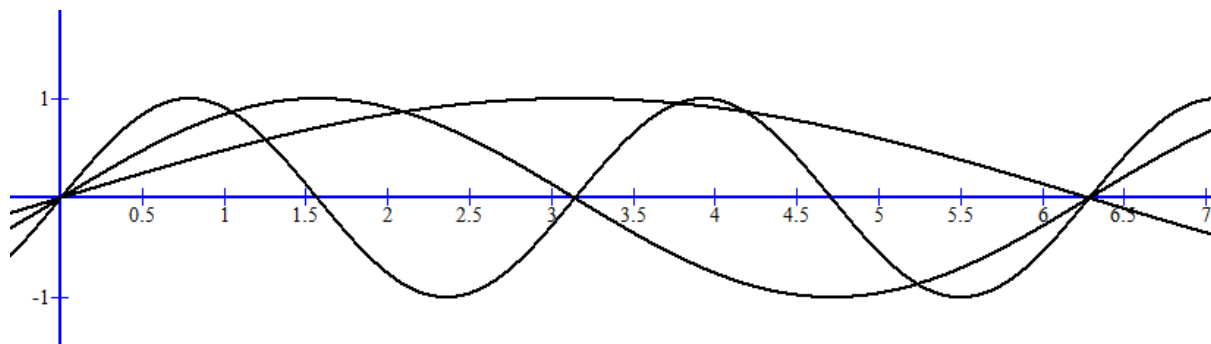
1. TYP

Mějme fci $y = \sin bx$, $b > 0$

- koeficient **b** má vliv na frekvenci sinusoidy (kosinusoidy), tj. zvětšuje nebo zmenšuje periodu fce p

$$= \frac{2\pi}{b}$$

PŘ.: $\sin x$; $\sin 2x$; $\sin \frac{1}{2}x$



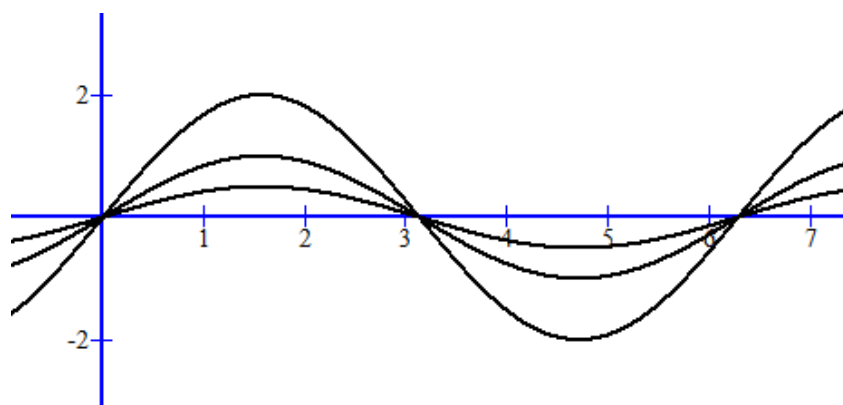
2. TYP

Mějme fci $y = a \cdot \sin x$, $a > 0$

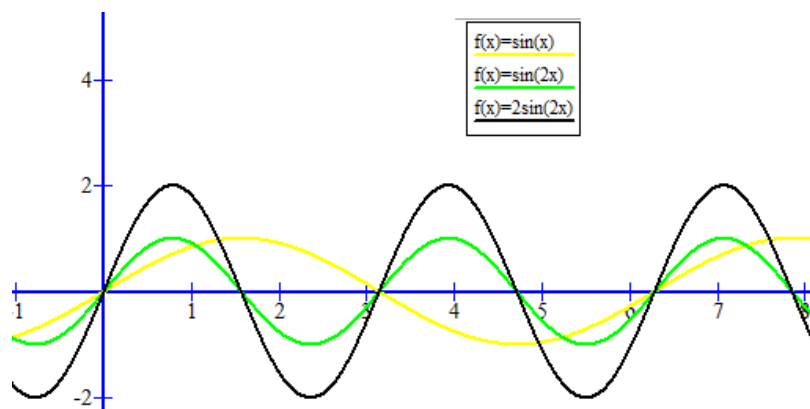
- koeficient **a** má vliv na amplitudu sinusoidy (kosinusoidy) – z fyzikálního hlediska
- z matematického – vliv na obor funkčních hodnot $H = \langle -a, a \rangle$

Pokud má graf průsečík s sou x , tak tento průsečík zůstává zachován.

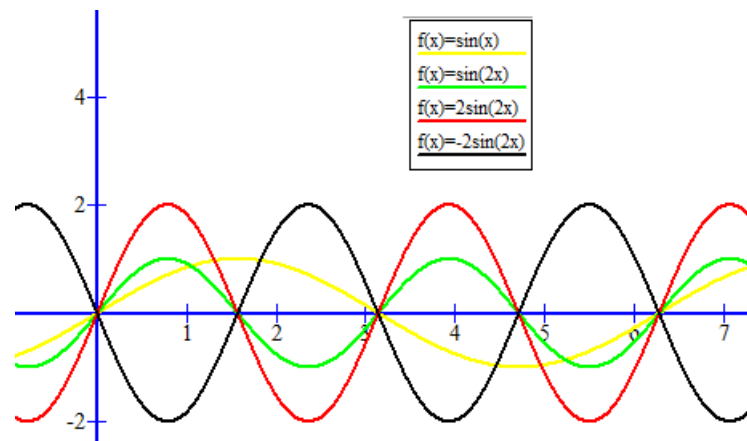
PŘ.: $\sin x$, $2\sin x$, $\frac{1}{2}\sin x$



PŘ.: Narýsuj graf fce: $y = 2\sin 2x$



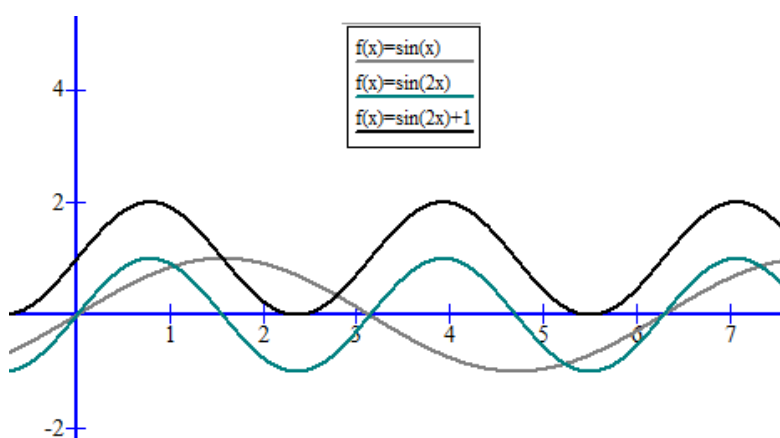
PŘ.: Narýsuj graf fce: $y = -2\sin 2x$



3. TYP

Mějme fci $y = \sin x + c$

- posun grafu (osy x) po ose y (+c nahoru, -c dolů)

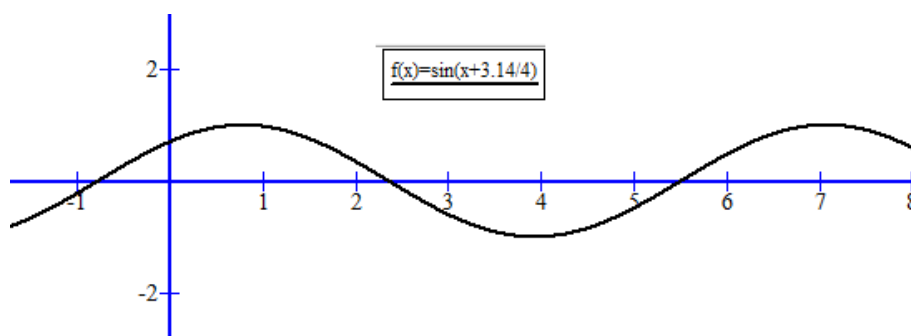


4. TYP

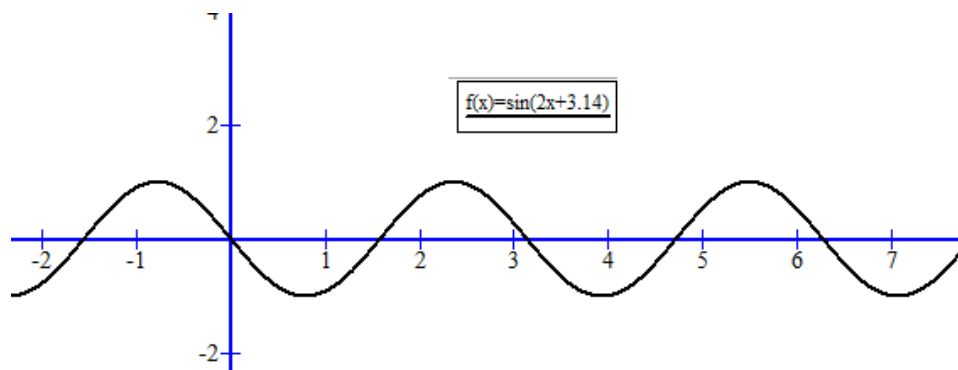
Mějme fci $y = \sin(x + d)$

- posun grafu po ose x (+d doleva, -d doprava)

PŘ.:



PŘ.:



PŘ.:

Narýsuj graf fce:

$$y = 2 \cos\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right) + 1$$

$$y = 2 \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) + 1$$

$$y = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

Způsoby zadávání funkce ve školské matematice

Funkce může být zadána různými způsoby:

- a) slovně
- b) tabulkou funkčních hodnot
- c) grafem v kartézské souřadnickové soustavě
- d) analyticky pomocí rovnic

1. explicitně ve tvaru $y = f(x)$, kde na levé straně je závisle proměnná y a na straně pravé výraz s nezávisle proměnnou x

2. implicitně rovnicí $F(x,y) = 0$, kde F je funkce dvou proměnných. Každou funkci zadanou explicitně můžeme vyjádřit též implicitně rovnicí $f(x) - y = 0$

3. parametricky rovnicemi

4. polárně

**A5. Základy kombinatoriky. Permutace, variace, kombinace. Užití v počtu
pravděpodobnosti. Teorie grafů. Kombinační čísla a Pascalův trojúhelník ve školské
matematice.**

KOMBINATORIKA

- je část matematiky zabývající se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Otázky, které kombinatorika řeší, se obvykle týkají počtu nějakých objektů (nebo skupin objektů) s definovanou strukturou, speciálně (pokud počet může být nulový) existencí objektu s definovanou strukturou.

1. Kombinatorické pravidlo součinu (je založeno na *větě o počtu prvků kartézského součinu k nekonečných množin*).

Věta: Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků, pak jejich kartézský součin (tj. množina všech uspořádaných k -tic $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ takových, že $x_i \in A_i$) má $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ prvků.

Pravidlo (kombinatorické vyjádření předchozí věty): Počet všech možných způsobů výběru (vytvoření) uspořádané k -tice $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ prvků $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_k \in A_k$ z množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ o $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvcích je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Pravidlo (zobecněné): Jestliže z prvků dané množiny (resp. daných množin) vytváříme uspořádané k -tice prvků $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tak, že první člen x_1 lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen x_2 lze vybrat po výběru prvního členu n_2 způsoby atd., až k -tý člen x_k lze vybrat po výběru všech předcházejících členů n_k způsoby, pak počet všech možných uspořádaných k -tic $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ je roven $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$.

Příklady kombinatorického pravidla součinu:

Máme dvě hrací kostky. Na každé jsou čísla 1, 2, 3, 4, 5 a 6. Pokud hodíme obě na stůl kolik kombinací čísel může padnout?

Pokud využijeme pravidlo součinu, máme 6 kombinací na první kostce a 6 kombinací na druhé kostce. Výsledkem bude $6 \cdot 6 = 36$. Máme tedy celkem 36 možných kombinací čísel. Pro názornost zde vypíšu některé z kombinací: 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 2,1; 2,2; 2,3; 2,4; 2,5 6,5; 6,6.

Máme dvě mince. Každá má dvě strany panna a orel. Pokud hodíme obě na stůl kolik kombinací může padnout?

Pokud využijeme pravidlo o součinu máme 2 kombinace u první mince a 2 kombinace u druhé mince. Výsledkem bude $2 \cdot 2 = 4$. Máme tedy celkem 4 možné kombinace. Pro názornost zde vypíšu tyto

kombinace: orel,orel; orel,panna; panna,orel; panna,panna.

Ted' propojíme dva předchozí příklady. Máme kostku s čísly 1, 2, 3, 4, 5, 6 a minci, kde je panna a orel. Pokud hodíme minci a kostku na stůl kolik kombinací může padnout?

Pokud využijeme pravidlo o součinu máme 2 kombinace u mince a 6 kombinací u kostky. Výsledkem bude $2 \cdot 6 = 12$. Máme tedy celkem 12 možných kombinací. Pro názornost zde vypíšu tyto kombinace: 1,orel; 2,orel; 3,orel; 4,orel; 5,orel; 6,orel; 1,panna; 2,panna; 3,panna; 4,panna; 5,panna; 6,panna; .

2. Kombinatorické pravidlo součtu (je založeno na větě o počtu prvků sjednocení k konečných disjunktních množin)

Věta: Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_k$ konečné množiny, které mají po řadě $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvků a jsou-li každé dvě z těchto množin disjunktní (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro každé $i \neq j$), pak jejich sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$ má $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ prvků.

Pravidlo (kombinatorické vyjádření předchozí věty): Počet všech možných způsobů výběru právě jednoho prvku ze sjednocení $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$, po dvou disjunktních množin $A_1, A_2, \dots, A_k$ o $n_1, n_2, \dots, n_k$ prvcích je roven $n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Příklad kombinatorického pravidla součtu:

Ve třídě je 20 dětí s toho 7 chodí do kroužku kreslení, 5 hraje fotbal, 2 hraji tenis. Kolik dětí nenavštěvuje žádný kroužek pokud víme, že žádný další kroužek ve škole není a žádné z dětí nenavštěvuje více jak jeden kroužek?

$$20 = 7 + 5 + 2 + x$$

$$x = 20 - 7 - 5 - 2$$

$$x = 6$$

Odpověď je tedy, že 6 dětí nenavštěvuje žádný kroužek.

Faktoriál čísla n je roven součinu všech přirozených čísel, která jsou menší nebo rovna číslu n . Faktoriál zapisujeme pomocí vykřičníku $n!$. Přičemž pro nulu platí: $0! = 1$. Faktoriál se využívá především v kombinatorice, kde se pomocí něj počítá například permutace.

VARIACE

- variace k -té třídy (nebo-li k -členná variace) z n prvků ($k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$) je každá uspořádaná k -tice sestavená z těchto n prvků tak, že každý prvek je v ní obsažen nejvýše jedenkrát. U variací záleží na pořadí a platí: $1 \leq k \leq n$.

$$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Příklad:

Představte si, že jste ve vesnici, ve které se nachází celkem pět hospod – „U Toníka“, „Pod kaštany“, „Za humny“, „Na Staré kovárně“ a „Space“. Vy chcete tento večer navštívit celkem tři hospody a protože ani jednu z nabízených neznáte, je vám jedno, které navštívíte. Ovšem důležité je pořadí, nemůžete jít do třech hospod zároveň.

Za n dosadíme počet celkových výskytů – v našem příkladu počet všech hospůdek. Za k dosadíme počet restauračních zařízení, které chceme navštívit. Poté již pomocí jednoduchého faktoriálu zjistíme počet možných variací.

$$V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

- variace k -té třídy s opakováním n prvků je každá uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát. I v tomto případě záleží na pořadí a platí také $k \leq n$.

$$V_{k(n)} = n^k$$

Příklad:

Máme prvky A B kolik je variací s opakováním pokud potřebujeme vybrat jeden, dva a nakonec tři prvky?

K výpočtu využijeme vzorec pro variace s opakováním:

$$V_{k(n)} = n^k$$

Pokud vybíráme jeden prvek:

$$V_{1(2)} = 2^1 = 2$$

Budou to variace: A, B.

Pokud vybíráme dva prvky:

$$V_{2(2)} = 2^2 = 4$$

Budou to variace: AA, AB, BA, BB.

Pokud vybíráme tři prvky:

$$V_{3(2)} = 2^3 = 8$$

Budou to variace: AAA, AAB, ABA, BAA, BBB, BBA, BAB, ABB.

PERMUTACE

- permutace z n prvků je každá n členná variace z těchto prvků $P(n) = Vn(n)$

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

- permutace s opakováním z n prvků je uspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje alespoň jednou. Speciálně pro $k = n$ jde o permutaci bez opakování a pro $k > n$ se některé prvky opakují.

Příklad:

Pokud máme 3 předměty: hrnek, kostku a polštář. Kolik můžeme vytvořit permutací?

Pro přehlednost si je vypíšeme:

hrnek, kostka, polštář,

hrnek, polštář, kostka,

kostka, hrnek, polštář,

kostka, polštář, hrnek,

polštář, kostka, hrnek,

polštář, hrnek, kostka,

Podářilo se nám tedy vytvořit 6 permutací.

KOMBINACE

- k -členná kombinace z n prvků je každá neuspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý prvek se v ní vyskytuje nejvýše jednou, nebo-li každá k -prvková podmnožina množiny těchto n prvků. Speciálně 0-členná kombinace z n prvků je její prázdná podmnožina (Polák)
- k -té třídy z n prvků je každá k prvková podmnožina v této množině určené těmito n prvky. Počet všech kombinací k -té třídy z n prvků označujeme takto: $C_{k(n)}$. Čte se to [n nad k] píše se to jako zlomek bez zlomkové čárky (matika online – je to v podstatě to samé)

$$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$K(0,n) = 1$$

Kombinace se od variace liší tím, že nezáleží na pořadí. Pokud porovnáme kombinaci a variaci výsledek je následný: Mějme množinu M s n prvky. Vytvořme $V_{k(n)}$ variace k -té třídy z n prvků. Všechny variace, které obsahují stejné prvky pak tvoří jednu kombinaci.

Příklad:

Zkusíme si spočítat příklad se sportkou. Máme tedy 49 čísel (n) a taháme z nich 6 čísel (k). Dosadíme do vzorce:

$$K(6,49) = \frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13\,983\,816$$

Existuje přes třináct milionů kombinací, z čehož plyne, že i kdyby všichni obyvatelé naší překrásné republiky vsadili právě jednu kombinaci do sportky, výhra by nebyla jistá.

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

- k -členná kombinace s opakováním z n prvků je neuspořádaná k -tice sestavená z těchto prvků tak, že každý se v ní vyskytuje nejvýše k -krát.

$$C_k^s(n) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Příklad:

Určete, kolika způsoby je možné rozmístit sedm stejných kuliček do tří krabiček.

Sedmkrát vybíráme jednu ze tří krabiček, do které umístíme kuličku; jde tedy o sedmičlenné kombinace s opakováním ze tří prvků ($k = 7$, $n = 3$).

$$K(7, 3) = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! 2!} = 36$$

KOMBINAČNÍ ČÍSLO

- k označení zlomku $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ ve vzorci pro $K(k, n)$ se používá symbol $\binom{n}{k}$, který se čte „ n nad k “ a nazývá se kombinační číslo.

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

PASCALŮV TROJÚHELNÍK

Sestavíme-li čísla do řádků tak, aby v každém byla všechna kombinační čísla pro dané n dostaneme Pascalův trojúhelník (v jeho řádcích jsou postupně kombinační čísla (n nad 0, n nad 1, n nad 2, n nad 3, ..., n nad n , pro $n=1, 2, 3, 4, \dots$)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		1							2^0	$n=0$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$		1	1						2^1	$n=1$
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$		1	2	1					2^2	$n=2$
$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\implies$	1	3	3	1				2^3	$n=3$
$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$		1	4	6	4	1			2^4	$n=4$
$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$		1	5	10	10	5	1		2^5	$n=5$
$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$		1	6	15	20	15	6	1	2^6	$n=6$

Jak je vidět z předchozího schématu součet čísel v n -tém řádku se rovná 2^n . Zároveň součet čísel na lichých místech v řádku se rovná součtu čísel na sudých místech v řádku. Každý z nich je tedy 2^{n-1} .

TEORIE GRAFŮ

Graf jako množina vrcholů se strukturou danou hranami odpovídá velice dobře volné „definici“ kombinatoriky - **kombinatorika (kombinatorická matematika)** je část matematiky zabývající se kolekcemi prvků množin s definovanou vnitřní strukturou. Otázky, které kombinatorika řeší, se obvykle týkají počtu nějakých objektů (nebo skupin objektů) s definovanou strukturou, speciálně (pokud počet může být nulový) existencí objektu s definovanou strukturou.

Typickým kombinatorickým problémem z teorie grafů je řešení otázky: „Kolik hran musí mít graf o 15 vrcholech, aby v něm musela existovat kružnice?“.

Netriviální kombinatorické problémy z teorie grafů se týkají barvení grafu. Patří sem teprve nedávno dokázané tvrzení, že každý rovinný graf lze obarvit čtyřmi barvami (tj. každou rovinnou politickou mapu lze obarvit čtyřmi barvami tak, aby dva sousední státy neměly stejnou barvu) nebo tvrzení na pomezí konečné a nekonečné kombinatoriky, podle kterého lze nekonečný graf obarvit n barvami, právě když každý jeho konečný podgraf lze obarvit nejvýše n barvami.

A6. Matematický pojem, definice, stavba a druhy definic. Axiomy, axiomatické systémy. Matematické věty a jejich důkazy. Formulování matematických vět ve školské matematice

Jedním z hlavních rysů soudobé matematiky je **axiomatická logická výstavba matematických teorií** v jednotlivých matematických disciplínách. Jejím základem jsou **axiómy (postuláty)**, které se prohlásí za pravdivé bez dokazování.

Axiom (postulát) – výchozí matematický výrok, který se prohlásí za pravdivý bez dokazování (fakt – tráva je zelená). Obsahuje základní primitivní pojmy, které se nedefinují (pokládají se za zavedené soustavou axiomů). Nelze je odvodit z něčeho jednoduššího.

Vlastnosti soustavy axiomů

bezespornost – ze soustavy axiomů není možné vyvodit žádný výrok a zároveň negaci

úplnost – ze soustavy axiomů je možné vyvodit pravdivost nebo nepravdivost libovolného matematického výroku, který není axiomem

nezávislost – nelze odvodit jeden axiom z ostatních axiomů (každý je nezávislý na ostatních)

Euklides vyjmenoval všechny axiomy (14). 2 části (Aitemata – postuláty, Koinai ennoiai – všeobecně uznávané pravdy, zásady). Nezná slovo přímka – používal slovo Eutheia (rovná konečná čára, která jde podle potřeby prodloužit nebo zkrátit). Dokonalý axiomatický systém, Planimetrii, vypracoval David Hilbert na přelomu 19. a 20. století.

Další matematické pojmy se zavádějí pomocí definic. **Definice** stanoví název zaváděného pojmu a vymezí podstatné vlastnosti pojmu pomocí dříve definovaných nebo primitivních pojmů.

Definice – určení nově zaváděného pojmu pomocí pojmů již zavedených.

- **obsah** – soubor vlastností charakteristických pro pojem (stejná vzdálenost od bodu S)
- **rozsah** – zahrnuje objekty s touto vlastností (množina všech bodů)

Př. Definice 1.: Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S stejnou vzdálenost r .

Definice má stavbu **ekvivalence**.

Typy definic

1. syntetická

- **nominální** – nový pojem se pojmenovává (sudá přirozená čísla)
- **konstruktivní** – popisuje konstrukci nového pojmu (úsečka spojující dva body kružnice se nazývá tětiva)
- **rekurentní** – např. posloupnost (daný předpis, jak tvořit další členy)

2. analytická

- **klasická** – Aristotelovská (nový pojem se vyčleňuje z nejbližšího nadřazeného – čtverec je rovnoběžník, který....)
- **kontextuální** – nový pojem na základě souvislostí s jinými pojmy (výroková formule)
- **abstrakcí** – abstrahováním vlastností (relace ekvivalence je relace, která je....)

Chyby v definicích

- definice kruhem
- definice široká
- definice úzká

Z definice odvozujeme různé výroky o dalších vlastnostech zavedených pojmů, kterým se říká věty. **Matematická věta (poučka, teorém)** je pravdivý matematický výrok a dá se odvodit pomocí logiky na základě axiomů, definic a dříve dokázaných vět. Věty, které obsahují návod k provedení výpočtu nebo konstrukce, se nazývají **pravidla**. Pro pomocné věty se v matematické literatuře používá název **lemma**.

Matematická věta (poučka, teorém) – matematický výrok, který na základě axiomů, definic a dříve dokázaných vět přináší nová tvrzení týkající se právě studovaného objektu. Specifický příklad vět jsou *pravidla* (Binomická, Pythagorova věta).

Pomocné věty – *Lemmy* – něco říkají

Věta se musí dokázat, obsahuje nová tvrzení!

Obecná věta - $\forall x \in D; A(x) \Rightarrow B(x)$

Existenční věta - $\exists x \in D; A(x) \Rightarrow B(x)$

(Př. Nultá mocnina neexistuje - 0)

Individuální věta – týkají se jediného objektu skupiny objektů množiny

(Př. Trojúhelník se stranami 3,4,5 je pravoúhlý)

Každá věta obsahuje **předpoklad** a **tvrzení**. Předpoklad vymezuje objekty, pro které příslušné tvrzení platí. Rozpoznat v dané větě, co je jejím předpokladem a co tvrzením, je velmi důležité pro pochopení věty, pro její důkaz i pro celou práci s ní dále.

Věta A

Pro každé celé kladné číslo a platí: je-li a liché číslo, pak a^2 je též liché číslo.

Předpoklad je

„ a je (celé kladné) liché číslo“,

tvrzení

„ a^2 je liché číslo“.

Věta B

Pro každé celé kladné číslo m platí: je-li m^2 dělitelné třemi, pak též m je dělitelné třemi.

Předpoklad je

„ m^2 je číslo dělitelné třemi, přitom m je celé kladné číslo“,

tvrzení

„ m je číslo dělitelné třemi“.

Většina matematických vět má tvar **obecného výroku** $\forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$ tzv. **obecné věty**, anebo **existenčního výroku** $\exists x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$ tzv. **existenční věty**.

Většina **obecných vět** má tvar implikace

Definiční obor $\rightarrow \forall x \in D : A(x) \Rightarrow B(x)$

$A(x)$ výroková forma, která se nazývá **předpoklad věty - postačující podmínka** pro platnost tvrzení $B(x)$.

$B(x)$ výroková forma, která se nazývá **závěr** nebo **tvrzení věty - nutnou podmínkou** pro platnost předpokladu $B(x)$.

Př.: A: Čtýřúhelník ABCD je čtverec.

B: Čtýřúhelník ABCD je rovnoběžník.

$A \Rightarrow B$: Když je čtýřúhelník ABCD čtverec, pak je čtýřúhelník ABCD rovnoběžník.

Obrácená věta – obecně NEPLATÍ

$$\forall (x \in D) : B(x) \Rightarrow A(x)$$

$B \Rightarrow A$: Když je čtýřúhelník ABCD rovnoběžník, pak je čtýřúhelník ABCD čtverec.

Obměněná věta – PLATÍ

$$\forall (x \in D) : (\neg B(x)) \Rightarrow (\neg A(x))$$

$B' \Rightarrow A'$: Když čtýřúhelník ABCD není rovnoběžník, pak čtýřúhelník ABCD není čtverec.

Ke každé větě platí i věta obměněná.

Hlavní metody důkazů

1) *přímý* - implikace $A \Rightarrow B$ se provádí pomocí řetězce pravdivých implikací.

$$A(x) \Rightarrow A_1(x_1) \Rightarrow A_2(x_2) \dots \Rightarrow B(x)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}; n \text{ je sudé} \Rightarrow n^2 \text{ je sudé}$$

$$n \text{ je sudé} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}; n=2k \Rightarrow n^2=4k^2 \Rightarrow n^2=2 \cdot 2k^2 \Rightarrow n \text{ je sudé}$$

$$A_1(x) \quad A_2(x) \quad A_3(x) \quad B(x)$$

2) *nepřímý* – implikace $A \Rightarrow B$ provádíme jako přímý důkaz její obměny $B' \Rightarrow A'$, neboť obě jsou ekvivalentní

$$A(x) \Rightarrow B(x) \text{ dokážeme přímo}$$

$$\neg B(x) \Rightarrow \neg A(x) \quad \text{má s původní stejné pravdivostní hodnoty}$$

obměna původní věty

Není-li n sudé číslo není ani n^2 sudé číslo

$$n \text{ liché} \Rightarrow n=2k+1$$

3) *důkaz sporem* – Výroku V (např. $A \Rightarrow B$) se provádí tak, že se daný výrok V neguje a pomocí řetězce implikací se dospěje k logickému sporu. Ze sporu vyplývá, že negované tvrzení V' neplatí, musí tedy platit původní výrok V .

$$A(x) \Rightarrow B(x) \text{ neplatí}$$

$$n^2 \text{ je sudé} \Rightarrow n \text{ je sudé}$$

$$\exists n^2 \text{ sudé} \wedge n \text{ liché}$$

$$n^2 - \text{liché}$$

$$n \text{ liché} \Rightarrow n^2=(2k+1)^2 \Rightarrow n^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow n^2 \text{ je liché (spor)}$$

4) *důkaz matematickou indukcí* – používá se pro výroky, kde proměnné jsou prvky množiny m

a) *indukční předpoklad* - dokážeme že věta platí pro $n=n_0$ (výrok platí pro n_0 – nejmenší možné přirozené číslo)

b) *indukční krok* - dokážeme pro každé přirozené číslo k , které je $\geq n_0$ jestliže platí výrok pro k , pak také platí výrok pro $k+1$. [$V(k)=V(k+1)$]

$$n \in \mathbb{N}$$

$$1+2+\dots+n=1/2 n(n+1)$$

$$a) 1=1/2 \cdot 1(1+1)$$

$$1=1 \text{ platí}$$

$$b) 1+2+\dots+k=1/2 k(k+1) \dots S_k$$

$$1+2+\dots+k+(k+1)=1/2(k+1)(k+1+1) \dots (S_{k+1})$$

$$S_{k+1}=S_k+(k+1)$$

$$\rightarrow 1/2(k+1)(k+2)=1/2 k(k+1)+(k+1) \quad [(k+1)(1/2 k+1)]$$

$$1/2(k+2)=1/2 k+1$$

$$1/2 k+1=1/2 k+1$$

**A7. Rovinné útvary, jejich klasifikace a zařazení do učiva ZŠ. Výpočty ploch
rovinných útvarů pomocí integrálního počtu. Základní konvexní útvary v rovině
(úsečka, polopřímka, polorovina, úhel, trojúhelník, rovinný pás).**

ROVINNÉ ÚTVARY

- jsou uzavřené obrazce, které jsou součástí dvojrozměrné roviny
- vznikají spojením úseček nebo bodů, které pak tvoří hranice útvaru a vymezují jeho plochu (obsah)
- příklady rovinných útvarů: čtverec, obdélník, čtyřúhelník, kruh, trojúhelník, ...)

Klasifikace rovinných útvarů

A) čtyřúhelníky

(dělení podle rovnoběžnosti stran)

1. rovnoběžníky

- podle velikosti úhlů

- a) pravoúhlé (čtverec, obdélník)
- b) kosoúhlé (kosočtverec, kosodélník)

- podle délek stran

- a) rovnostranné (čtverec, kosočtverec)
- b) různostranné (obdélník, kosodélník)

2. lichoběžníky

- pouze jedna dvojice protějších stran je rovnoběžná

- a) obecný
- b) rovnoramenný – nerovnoběžné strany mají shodnou délku
- c) pravoúhlý – jedno z ramen je kolmé k základně

3. různoběžníky

- čtyřúhelníky, jejichž žádné dvě strany nejsou rovnoběžné

- a) tětiové – lze jim opsat kružnice, jejich strany jsou tětivy kružnice opsané
- b) tečnové – lze jim vepsat kružnice, jejich strany jsou tečnami kružnice vepsané
- c) deltoid – jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé

B) trojúhelníky

- vznikají průnikem tří polorovin ABC, BCA, CAB, kde body A,B,C jsou různé a neleží v jedné přímce

- *podle délek stran*

- a) obecné – žádné dvě strany nejsou stejně dlouhé (různostranné)
- b) rovnoramenné – dvě strany jsou stejně dlouhé
- c) rovnostranné – všechny strany jsou stejně dlouhé, speciální případ rovnoramenných

- *podle velikosti vnitřních úhlů*

- a) ostroúhlé – všechny úhly jsou ostré
- b) tupoúhlé – mají jeden úhel tupý
- c) pravoúhlé – jeden úhel pravý

Platí:

- součet vnitřních úhlů $= 180^\circ$
- součet každých dvou stran je větší než strana třetí
- proti shodným stranám leží shodné vnitřní úhly
(proti větší straně – větší úhel a také naopak, proti většímu úhlu leží větší strana)

Pojmy:

Střední příčka: úsečka spojující středy stran. Je rovnoběžná se stranou, jejíž střed nespojuje, její délka je rovna polovině délky této strany.

Výška: úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníka a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímkce určené zbývajících vrcholy.

Ortocentrum: bod, ve kterém se protínají výšky trojúhelníka.

Těžnice: úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany.

Těžiště: bod, ve kterém se protínají těžnice

Osy stran: protínají se v jednom bodě (střed kružnice opsané)

Osy vnitřních úhlů: protínají se v jednom bodě (střed kružnice vepsané)

C) **n** – úhelníky

- uzavřené lomené čáry spolu s částí roviny ohraničenou touto lomenou čarou
- hranice mnohoúhelníku – lomená čára ohraničující mnohoúhelník
- počet stran = počet vrcholů
- a) konvexní
- b) nekonvexní
- c) pravidelný - strany i úhly jsou shodné
- lze mu opsat kružnici

- je-li n sudé, existuje ke každému vrcholu vrchol protější,

ke každé straně strana rovnoběžná

d) nepravidelný

D) kružnice, kruh

- Je dán bod S (střed) a kladné číslo r (poloměr)

Kružnice $k(S,r)$ je množina všech bodů, které mají od středu stejnou vzdálenost rovnou r

Kruh $K(S,r)$ je množina všech bodů, které mají od středu stejnou nebo menší vzdálenost r

Pojmy:

Tětiva: úsečka spojující dva body na kružnici - dělí kružnici na dva **kružnicové oblouky**

- oba body jsou společné pro oba oblouky

Průměr: Tětiva procházející středem - je ze všech tětiv nejdelší

- dělí kruh na dvě **kruhové úseče**

- je příslušný konvexnímu středovému úhlu α

- jeho osa prochází středem dané kružnice.

Kruhové výseče – dvě části vytvořené dvěma poloměry

E) bod, přímka, rovina

Bod

- základní geometrický útvar, bezrozměrný

- graficky se bod znázorňuje křížkem, malým kolečkem nebo kroužkem, označuje se velkým tiskacím písmenem

- úsečka nulové délky

Přímka

- spojnice dvou bodů

- znázorňuje se rovnou čarou, označuje se malým písmenem

- v rovině lze algebraicky popsat pomocí lineárních rovnic nebo lineárních funkcí.

Rovina

- určena třemi různými body, nebo přímkou a bodem, který leží mimo tuto přímku

- plocha, označována malým písmene řecké abecedy

ZAŘAZENÍ DO UČIVA ZŠ

6. třída

- základní geometrické útvary (bod, přímka, úsečka)
- obvod čtverce, obdélníku
- úhel
- mnohoúhelníky (konstrukce, výpočet obvodu)
- trojúhelník (vnitřní/vnější úhly, těžnice, výšky, kružnice opsaná/vepsaná)
- shodnost geometrických útvarů

7. třída

- rovnoběžníky, lichoběžníky (pojem, konstrukce)
- středová souměrnost – sestrojení obrazu vzoru

8. třída

- kruh, kružnice
- Pythagorova věta
- Thaletova kružnice)

9. třída

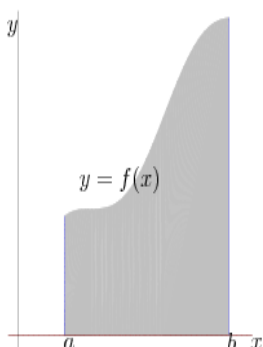
- podobnost
- shodnost trojúhelníku
- osová/středová souměrnost, posunutí, skládání

VÝPOČTY PLOCH ROVINNÝCH ÚTVARŮ POMOCÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU

Obsah rovinných obrazců

Def:

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, je-li $f(x)$ nezáporná funkce definovaná na intervalu $\langle a, b \rangle$, pak množina $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ se nazývá podgrafem (subgrafem) fce f .



Věta:

Je-li funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná a integrovatelná, pak obsah S rovinného obrazce, který je podgrafem fce $f(x)$ je dán vzorcem:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Důsledek:

Jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ fce integrovatelné na intervalu $\langle a, b \rangle$ a splňující nerovnost $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro $\forall x \in \langle a, b \rangle$, pak je zkoumaný rovinný obraz $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2: a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$ množinovým rozdílem podgrafu fce f a podgrafu fce g a pro jeho obsah platí:

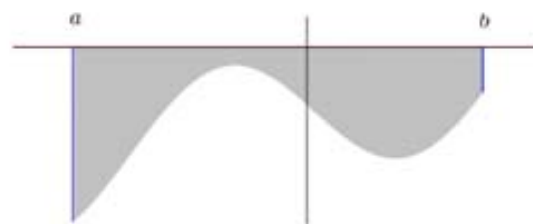
$$S = \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

Při řešení úloh může nastat situace, kdy integrovaná fce $f(x)$ není na intervalu $\langle a, b \rangle$ nezáporná – může nabývat nekladných hodnot. Pro příslušný integrál potom platí:

$$\int_a^b f(x) dx < 0$$

V takových případech počítáme obsah daného útvaru jako absolutní hodnotu příslušného určitého integrálu podle vzorce:

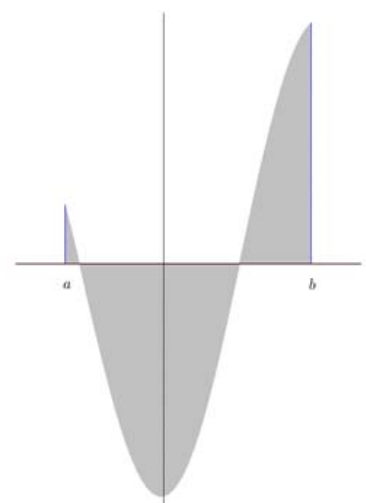
$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = - \int_a^b f(x) dx$$



Podgraf nekladné funkce $f(x)$

Existují také fce, které nabývají na intervalu $\langle a, b \rangle$ jak kladných, tak záporných hodnot.

V tomto případě si rozdělíme interval $\langle a, b \rangle$ na jednotlivé intervaly, ve kterých fce nabývá nezáporných, resp. nekladných hodnot a příslušné integrály spočítáme dle známých vzorců.



Podgraf nezáporné i nekladné funkce $f(x)$

ZÁKLADNÍ KONVEXNÍ ÚTVARY V ROVINĚ

Konvexní útvar

libovolné dva body tohoto útvaru lze spojit úsečkou, která celá (tj. všechny její body) leží v tomto útvaru

Úsečka

Definice: Mějme dány dva různé body M, N na přímce p . Úsečka MN je množina všech bodů na přímce p , které leží mezi body M, N , sjednocena s množinou $\{M, N\}$.

Polopřímka

Definice? Na přímce p mějme dány dva různé body P, A . Polopřímka s počátkem v bodě P , na níž leží bod A , (označení $\rightarrow PA$) je definována takto: $\rightarrow PA = \{X \in p : X = P + t(A-P), t \geq 0\}$. Polopřímka opačná k $\rightarrow PA$ (označení $\leftarrow PA$) se definuje takto:

$$\leftarrow PA = \{X \in p : X = P + t(A-P), t \leq 0\}.$$

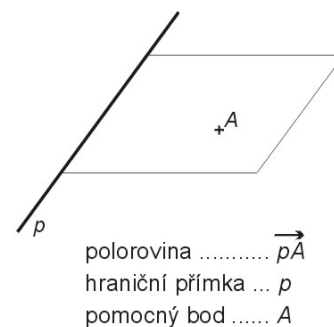
Věta: Buď p přímka, $A, P \in p, P \neq A$. Platí: $\leftarrow PA = \{X \in p : X = P \vee P \text{ leží mezi } A, X\}$.

Důkaz: $X \in \leftarrow PA \Leftrightarrow X = P + t(A-P), t \leq 0 \Leftrightarrow P-X = t(P-A) \Leftrightarrow (XAP) = t < 0$. Podle věty 12.4 je P mezi A, X .

Věta: Polopřímka je konvexní útvar na přímce.

Polorovina

Část roviny, která vznikne rozdělením roviny jednou přímkou. Přímka, která rozdělila rovinu, se nazývá *hraniční přímka* poloroviny. Pro bližší určení poloroviny se v polorovině volí další bod neležící na hraniční přímce, tento bod se nazývá *pomocný bod*.



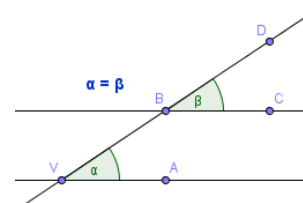
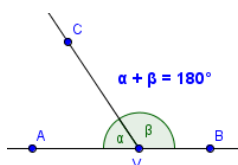
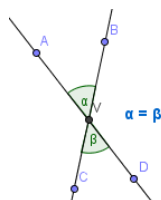
Úhel

Část roviny ohraničená dvěma polopřímkami, které mají společný počátek.

- konvexní $< 180^\circ$
- konkávní $> 180^\circ$
- přímý 180°
- plný 360°
- ostrý $< 90^\circ$
- tupý $> 90^\circ$
- pravý 90°

Dvojice úhlů

- vrcholové $\alpha = \beta$
- vedlejší $\alpha + \beta = 180^\circ$
- souhlasné $\alpha + \beta = 180^\circ$



Trojúhelník

viz.2. str.

Rovinný pás

Rovnoběžky jsou dvě přímky, které nemají žádný společný bod (nikde se neprotínou).

Prostor mezi rovnoběžkami se nazývá rovinný pás.

Osa (*o*) rovinného pásu je přímka, která rozdělí pás na dva shodné pásy. Přímka, která není s dvěma rovnoběžkami rovnoběžná, svírá s oběma rovnoběžkami stejné úhly. Tyto úhly nazýváme souhlasné úhly. Vrcholový úhel souhlasného úhlu je úhel střídavý.

A8. Základní pojmy stereometrie. Tělesa v učivu ZŠ. Zobrazovací metody (volné rovnoběžné promítání, pravoúhlá axonometrie, mongeovo promítání). Základní konvexní útvary v prostoru (poloprostor, vrstva, klín, trojhran, trojboký hranolový prostor, čtyřstěn)

STEREOMETRIE

- zabývá se studiem prostorových útvarů, tzv. geometrie v prostoru
- slovo řeckého původu znamenající „měření těles“

Základní vztahy mezi prostorovými útvary:

- 1) Ke každé přímce lze daným bodem v prostoru vést právě jednu rovnoběžku.
- 2) Dvěma různými body AB prochází právě jedna přímka p (je jimi jednoznačně určena). Píšeme $p \equiv AB$.
- 3) Leží-li dva body A, B v rovině α , pak v této rovině leží i přímka $p \equiv AB$.
- 4) Daným bodem A a danou přímkou p , $A \notin p$, prochází (je určena) právě jedna rovina.
- 5) Třemi různými body A, B, C , které neleží na téže přímce, prochází (je určena) právě jedna rovina.
- 6) Dvěma různými přímkami, které mají společný bod (různoběžkami), prochází (je určena) právě jedna rovina.
- 7) Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společnou celou přímku (průsečnici), která tímto bodem prochází. Mimo průsečnici již nemají žádný společný bod.

Vzájemná poloha přímek a rovin:

Dvě přímky v prostoru:

- neleží v jedné rovině (mimoběžky)
- leží v téže rovině:
 - žádný společný bod (přímky rovnoběžné různé)
 - jeden společný bod (přímky různoběžné)
 - všechny společné body (přímky rovnoběžné splývající).

Přímka a rovina v prostoru:

- žádný společný bod (přímka je rovnoběžná s rovinou a neleží v ní)
- jeden společný bod (přímka je různoběžná s rovinou)
- všechny společné body (přímka leží v rovině).

Dvě roviny v prostoru

- žádný společný bod (roviny rovnoběžné různé)
- společná právě jedna přímka (roviny různoběžné)
- společné všechny body (roviny rovnoběžné splývající).

Tělesa v učivu ZŠ

(vypsáno z RVP, ŠVP)

1. stupeň

- základní útvary v prostoru – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec

2. stupeň

- prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol

6. třída

- kvádr a krychle
- povrch a objem kvádru a krychle

7. třída

- hranoly
- objem a povrch hranolů
- slovní úlohy z praxe

8. třída

- válec
- objem a povrch válce
- slovní úlohy z praxe

9. třída

- jehlan, kužel, koule
- objem a povrch jehlanu, kužele, koule

Volné rovnoběžné promítání

- Zabývá se problémem, jak zobrazit trojrozměrné objekty v dvojrozměrném prostoru.
- Zvolíme si rovinu (papír) a body z prostoru do ní budeme přenášet pomocí rovnoběžek.

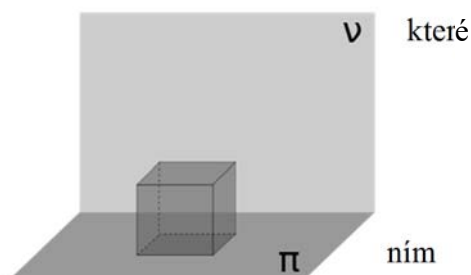
Pojmy:

- rovnoběžné promítání - postup založený na vytváření bodů pomocí rovnoběžek
- průmětna - rovina, do které body přenášíme

- směr promítání – směr rovnoběžek, které používáme na promítání (je u navzájem rovnoběžných přímek stejný)
- rovnoběžný průmět bodu – body vzniklé promítáním

Vlastnosti:

- Shodné a navzájem rovnoběžné úsečky se promítají do úseček, jsou také shodné a navzájem rovnoběžné (nebo je průmětem každé z nich bod).
- Útvar, který leží v průmětně nebo v rovině s průmětnou rovnoběžné (průčelná rovina), se promítá do útvaru, který je s shodný.



Pravoúhlá axonometrie

- v pravoúhlé axonometrii se promítá kolmo do roviny, která je obvykle zcela obecně položena vzhledem k zadané pravoúhlé souřadnicové soustavě
- tím se dosahuje značné názornosti i pro objekty, které jsou v této souřadnicové soustavě umístěny speciálně
- nevýhoda je v tom, že ze samotného výsledného axonometrického obrazu lze jen stěží určit skutečné rozměry zobrazovaných objektů
- pravoúhlou axonometrii lze v praxi často najít u počítačových her typu strategie, a také při názorném zobrazování montážních postupů např. u dětských či nábytkových stavebnic



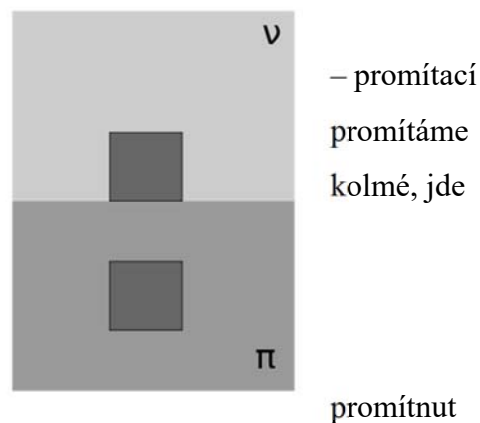
:-)

Mongeovo promítání

- Využívá rovnoběžného pravoúhlého promítání objektu do dvou na sebe kolmých rovin (průměten) - půdorysny (ve vodorovné poloze) a nárysny (ve svislé poloze).
- Oproti běžnému rovnoběžnému promítání dovoluje přidání další průmětny jednoznačnější přiřazení bodů technického výkresu k bodům v prostoru a tím lepší zachycení trojrozměrného objektu do dvojrozměrného výkresu.
- Jméno této metodě dal francouzský přírodovědec a matematik Gaspard Monge (1746 - 1818), jenž je pokládán za otce deskriptivní geometrie.

Princip promítání:

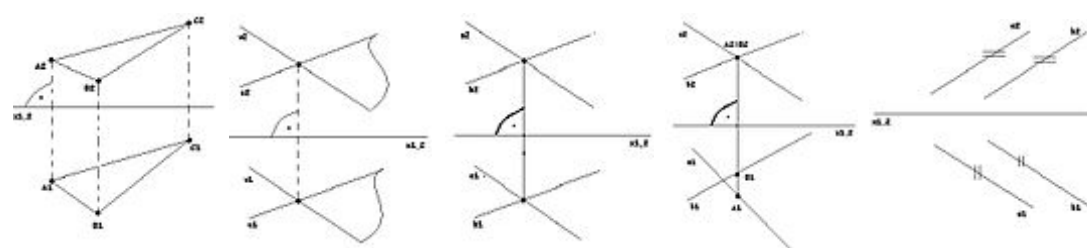
- Nejprve promítáme kolmo na vodorovnou rovinu π (půdorysnu) přímky jsou svislé, jde tedy o pohled shora (půdorys). Poté kolmo na svislou rovinu v (nárysnu) – promítací přímky jsou tedy o pohled zepředu (nárys).



Konstrukce:

- každý bod je v Mongeově promítání nejprve pravoúhle do půdorysny π a nárysny v - je sestaven jeho půdorys a nárys - následuje sklopení o 90° jedné průmětny do druhé kolem osy x - tzv. sdružení průmětů tím je každému bodu v prostoru jednoznačně přiřazena dvojice bodů v rovině - tzv. sdružené průměty, jejichž spojnice je kolmá k ose x a říká se jí ordinála - je-li dán bod A o souřadnicích $[x_A; y_A; z_A]$, pak příslušná ordinála protíná osu x v bodě x_A a půdorys A_1 případně nárys A_2 leží ve vzdálenosti y_A resp. z_A od osy x

Příklady:



Poloprostor

Každá rovina rozděluje prostor na dva opačné poloprostory, jejichž průnikem je právě hraniční rovina. Každý poloprostor je určen hraniční rovinou a bodem, který na ní neleží (vnitřním bodem). Poloprostor určený hraniční rovinou α a vnitřním bodem B značíme α, β

Vrstva:

Nechť jsou dány dvě rovnoběžné roviny α, β a body $A \in \alpha, B \in \beta$.

Vrstvou rozumíme množinu $\alpha B \cap \beta A$

Roviny $\alpha; \beta$ nazýváme hraničními rovinami vrstvy

- Průnik dvojice poloprostorů, určených rovinami α, β , kde α je rovnoběžná s β a $\alpha \neq \beta$

Klín:

- Průnik dvojice poloprostorů, určených rovinami α, β , kde α není rovnoběžná s β

- klínový prostor: průnik dvou poloprostorů, jejichž hraniční roviny jsou různoběžné
- hrana klínového prostoru: společná přímka onou hraničních rovin

Trojhran:

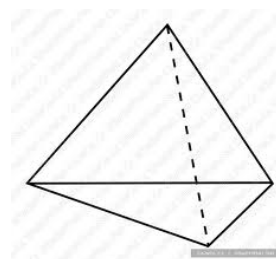
- Průnik tří poloprostorů, určených rovinami α, β, γ , kde α, β, γ jsou roviny, které mají společný právě jeden bod
- mnohostran o třech stěnách
- součet velikostí hranových úhlů je $< 360^\circ$
- velikost každého hranového úhlu je menší než součet ostatních dvou a větší než jejich rozdíl

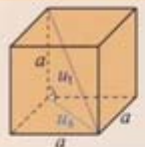
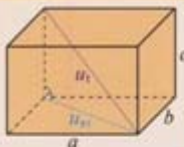
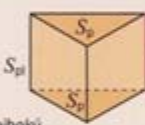
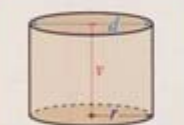
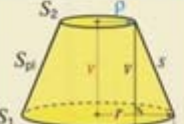
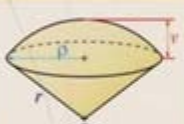
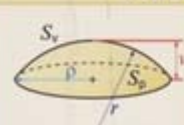
Trojboký hranolový prostor

- Průnik tří poloprostorů, kt. jsou určeny třemi rovinami, které nemají společný bod, nejsou navzájem rovnoběžné a jsou rovnoběžné s toutéž přímkou

Čtyřstěn

- Průnik čtyř poloprostorů
 - obecný čtyřstěn je tvořen čtyřmi obecnými trojúhelníky
 - pravidelný čtyřstěn je tvořen čtyřmi stejnými rovnostrannými trojúhelníky.
- Pravidelný čtyřstěn patří mezi mnohostěny, speciálně mezi takzvaná platónská tělesa.



 KRYCHLE - povrch: $S = 6a^2$ - objem: $V = a^3$ - délka stěnové úhlopříčky: $u_s = a \cdot \sqrt{2}$ - délka tělesové úhlopříčky: $u_t = a \cdot \sqrt{3}$	 KVÁDR - povrch: $S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ - objem: $V = a \cdot b \cdot c$ - stěnová úhlopříčka: $u_s = \sqrt{a^2 + b^2}$ - tělesová úhlopříčka: $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
 KOLMÝ HRANOL - povrch: $S = 2S_p + S_{pl}$ - obsah pláště: $S_{pl} = o \cdot v$ - objem: $V = S_p \cdot v$ ✓ o = obvod podstavy trojboký	 ROTAČNÍ VÁLEC - povrch: $S = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot v = 2\pi r(r + v)$ - obsah pláště: $S_{pl} = 2\pi \cdot r \cdot v$ - objem: $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ - poloměr: $r = \frac{d}{2}$ pravidelný šestiboký kolmý hranol
 ROTAČNÍ KUŽEL - povrch: $S = S_p + S_{pl}$ $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ - obsah pláště: $S_{pl} = \pi \cdot r \cdot s$ - délka strany pláště: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ - objem: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$	 KOMOLÝ ROTAČNÍ KUŽEL - povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$ $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot R^2 + \pi \cdot (r + R) \cdot s$ - obsah pláště: $S_{pl} = \pi \cdot (r + R) \cdot s$ - délka strany pláště: $s = \sqrt{(r - R)^2 + v^2}$ - objem: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot v \cdot (r^2 + rR + R^2)$
 KOLMÝ JEHLAN - povrch: $S = S_p + S_{pl}$ - obsah pláště: $S_{pl} = \frac{1}{2} o \cdot h$ - objem: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ ✓ pravidelný čtyřboký jehlan: podstava $\square$ ✓ pravidelný čtyřstěn: stěny i podstavu tvoří rovnostranné $\triangle$ čtyřboký	 KOMOLÝ JEHLAN - povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pl}$ - obsah pláště: $S_{pl} = \frac{1}{2} (o_1 + o_2) \cdot h$ - objem: $V = \frac{1}{3} v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$ ✓ o_1, o_2 = obvody podstav čtyřboký
 KOULE - povrch: $S = 4\pi \cdot r^2$ $S = \pi \cdot d^2$ - objem: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$ $V = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$	 KULOVÁ VÝSEČ - povrch: $S = 2\pi r v + \pi \rho^2$ - objem: $V = \frac{2}{3} \pi \cdot r^2 v$ - poloměr příslušné kulové úseče: $\rho = \sqrt{v \cdot (2r - v)}$
PŘEVODY JEDNOTEK - délka: km $\xrightarrow{\cdot 1000}$ m $\xrightarrow{\cdot 10}$ dm $\xrightarrow{\cdot 10}$ cm $\xrightarrow{\cdot 10}$ mm - obsah: km² $\xrightarrow{\cdot 100}$ ha $\xrightarrow{\cdot 100}$ a $\xrightarrow{\cdot 100}$ m² $\xrightarrow{\cdot 100}$ dm² $\xrightarrow{\cdot 100}$ cm² $\xrightarrow{\cdot 100}$ mm² - objem: m³ $\xrightarrow{\cdot 1000}$ dm³ $\xrightarrow{\cdot 1000}$ cm³ $\xrightarrow{\cdot 1000}$ mm³ - hl $\xrightarrow{\cdot 10}$ l $\xrightarrow{\cdot 100}$ dl $\xrightarrow{\cdot 10}$ cl $\xrightarrow{\cdot 10}$ ml	 KULOVÁ ÚSEČ, VRCHLÍK - povrch vrchlíku: $S_v = 2\pi \cdot r \cdot v$ - povrch kulové úseče: $S = S_v + S_p$ $S = \pi \cdot \rho^2 + 2\pi \cdot r \cdot v$ - objem kulové úseče: $V = \frac{1}{6} \pi v \cdot (3\rho^2 + v^2)$ - poloměr podstavy kulové úseče: $\rho = \sqrt{v \cdot (2r - v)}$

A9. KONSTRUKČNÍ ÚLOHY V UČIVU MATEMATIKY NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE. MNOŽINY BODŮ DANÉ VLASTNOSTI.

Od 1. stupně základní školy se žáci setkávají s úkoly typu „sestrojte“ geometrický útvar, a právě tyto úlohy jsou nazývané konstrukčními úlohami. Tyto úlohy se zabývají sestrojením určitého útvaru za určitých daných podmínek. Nejdůležitější ovšem není samotné rýsování daného útvaru, ale řešení konstrukční úlohy.

Konstrukční úlohou rozumíme úlohu, která vyžaduje sestrojit jistý geometrický útvar (alespoň jeden, případně všechny geometrické útvary) splňující dané podmínky.

Pomůcky při realizaci konstrukčních úloh

K nejčastějším pomůckám při realizaci konstrukčních úloh patří pravítko a kružítko.

Použití těchto pomůcek je stanoveno úmluvami:

- Podle pravítka rýsujeme přímku (část přímky), která spojuje dva známé body.
- Pomocí kružítko rýsujeme kružnici, střed kružnice je známý bod a poloměr je dán dvěma známými body.
- Vyjdeme z jisté skupiny daných bodů – další body sestrojujeme jako společné body narýsovaných přímek a kružnic, pokud tyto body existují.

Konstrukce, které provádíme pouze těmito dvěma rýsovacími potřebami, se nazývají eukleidovské konstrukce.

Při řešení konstrukčních úloh můžeme použít rýsovací náčiní – rýsovací náčiní se nazývá v teorii geometrických konstrukcí názvem „prostředky“, proto se hovoří o „konstrukcích danými prostředky“.

Mezi rýsovací prostředky patří:

Kružítko – konstrukční úmluvy jsou tyto:

- Pomocí kružítko sestrojíme kružnici, jejíž střed je známý a poloměr je dán dvěma známými body.
- Sestrojíme body, které jsou společné již narýsovaným konstrukcím.

Rovnoběžkové pravítko – je pravítko s dvěma přímými hranami, které jsou navzájem rovnoběžné a jejichž vzdálenost je v .

Konstrukční úmluvy jsou tyto:

- Sestrojíme přímku jako spojnicí dvou sestrojených bodů.
- Určíme bod, který je společný dvěma sestrojeným různoběžným přímkám.
- K sestrojené přímce rýsujeme rovnoběžku ve vzdálenosti v .
- Dvěma danými body, kde jejich vzdálenost je rovna nebo větší v , sestrojíme dvě rovnoběžné přímky o vzdálenosti v .

Úhlové pravítko – je to trojúhelníkové pravítko, jehož dvě strany svírají dutý úhel dané velikosti a , ve škole se užívá pravoúhlé trojúhelníkové pravítko.

Konstrukční úmluvy jsou tyto:

- a) a b) jsou stejné jako u rovnoběžkového pravítka.
- c) Sestrojeným bodem sestrojíme druhé rameno úhlu velikosti a , jehož první rameno leží na narýsované přímce.
- d) Sestrojíme vrchol úhlu velikosti a , jehož ramena procházejí dvěma známými body.

Jednotkové pravítko – tj, přímé pravítko, na jehož hraně jsou vyznačeny dva body E_1 a E_2 jejichž vzdálenost je daná jednotková úsečka e .

Dané úmluvy jsou tyto:

- a) a b) jsou stejné jako u rovnoběžkového pravítka.
- c) Na sestrojené přímce sestrojíme dva body, které mají od jejího známého bodu vzdálenost e .
- d) Určujeme společné body sestrojené přímky a narýsované kružnice, která má střed ve známém bodě a její poloměr je e .

Euklidovské konstrukce

Konstrukce, které provádíme pravítkem a kružítkem, nazýváme eukleidovské konstrukce.

Základními eukleidovskými konstrukcemi rozumíme:

1. sestrojíme přímky procházející dvěma danými různými body.
2. Sestrojíme kružnice o daném středu a poloměru.
3. Určíme bod jako společný bod dvou různoběžných přímek.
4. Určíme bod jako společný bod kružnice a přímky.
5. Určíme bod jako společný bod dvou kružnic.

Některé další jednodušší konstrukce vytvořené jistou posloupností výše uvedených pěti základních konstrukcí, a to tyto:

- Přeneseme dané úsečky na danou polopřímku.
- Sestrojíme kolmice k dané přímce tak, aby procházela daným bodem.
- Přeneseme konvexní úhel k dané polopřímce do dané poloroviny.
- Sestrojíme střed úsečky.
- Rozdělíme úsečky na n stejných dílů.
- Sestrojíme osy úsečky.
- Sestrojíme osy úhlu.

Řešení konstrukčních úloh

Řešení konstrukční úlohy spočívá v nalezení takové posloupnosti základních konstrukcí, která umožní sestrojit všechny neznámé body nebo útvary.

Fáze řešení konstrukčních úloh:

1. Rozbor neboli analýza.
2. Sestrojení neboli konstrukce. + popis
3. Zkouška neboli zdůvodnění konstrukce.
4. Diskuze.
 - Rozbor: úkolem rozboru je nalézt souvislosti mezi danými a hledanými prvky. Tyto souvislosti umožňují objevit posloupnost konstrukcí, při jejichž realizaci sestrojíme hledané body nebo útvary. Nejprve si uděláme náčrt situace a do něho zakreslíme jak dané, tak i hledané prvky. V náčrtu si označíme i další geometrické útvary (přímky, kružnice, body), které budou využity při řešení konstrukční úlohy. Při řešení konstrukčních úloh bychom měli předpokládat, že je úloha řešitelná.
 - Konstrukce: nejdříve musíme vyslovit předpis – posloupnost základních konstrukcí, podle kterého vytvoříme požadovaný geometrický útvar – grafické znázornění. Také se může stát, že útvar nelze sestavit podle konstrukčního předpisu, nevyhovuje tedy podmínkám, proto není řešením úlohy.
 - Zkouška: ověřujeme, zda všechny body nebo útvary splňují všechny požadavky dané zadáním úlohy.
 - Diskuze: používá se tehdy, když se řeší množina úloh, tj. jsou-li v úloze proměnné prvky – parametry. Stanovují se podmínky řešitelnosti a provádí se roztrídění na množiny úloh – úlohy neřešitelné, úlohy s jedním řešením, dvěma výsledky atd. Vše je na základě parametrů, které se vyskytují v úloze.

Třídění konstrukčních úloh

Konstrukční úlohy třídíme podle různých hledisek. Jedním ze způsobů je třídění na úlohy s jedním neznámým bodem a na úlohy se dvěma a více neznámými body. Konstrukční úlohy se dále třídí na úlohy polohové a nepolohové.

Konstrukční úlohy dělíme zpravidla takto:

- Úlohy s jedním, dvěma a více neznámými body – spočívají v nalezení jednoho či více neznámých bodů, tyto body určují geometrický útvar.
- Úlohy polohové – zde je dána poloha daných prvků. (mám kružnici se středem v bodě S a přímku, která je její tečna. Sestrojte trojúhelník, který prochází S a dotýká se tečny.)
- Úlohy nepolohové – není zde daná poloha žádného z daných prvků, umístěním některého z daných prvků (bodu, úhlu, ...), můžeme nepolohovou úlohu převést do polohové. Tomuto se říká lokalizace nepolohové úlohy, při lokalizaci je třeba zvolit nejvýhodnější způsob řešení úlohy. (sestroj trojúhelník)

Ukázky příkladů:

1. Nepolohová úloha s jedním neznámým bodem C:
Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: $AB = c = 6 \text{ cm}$, $AC = b = 7 \text{ cm}$, $v_c = 2 \text{ cm}$.
2. Polohová úloha s jedním neznámým bodem – střed kružnice S:
Je daná úsečka KL. Sestrojte všechny trojúhelníky KLM, známe-li velikost výšek v_k a v_l .

Metody řešení konstrukčních úloh

Při řešení konstrukční úlohy můžeme používat různé metody.

Metody řešení KÚ:

1. Konstrukce metodou množin všech bodů s danou vlastností – neznámé body se určují jako prvky průniku dvou takových množin.
2. Konstrukce metodou zobrazení – užití geometrických zobrazení, kde si některé dané nebo hledané útvary odpovídají jako vzor a obraz.
3. Konstrukce algebraicko-geometrickou metodou – při těchto úlohách používáme výpočty některých prvků.

Ukázky příkladů:

1. Konstrukce metodou množin všech bodů:
Sestroj trojúhelník ABC, kde strana $AB = 5 \text{ cm}$, $\beta = 70^\circ$, $BC = 4 \text{ cm}$.
2. Konstrukce metodou zobrazení:
Jsou dány tři navzájem různé přímky p , q , r . Na přímce p sestrojte bod P tak, aby bod Q k němu souměrný podle přímky r ležel na přímce q .
3. Konstrukce algebraicko-geometrickou metodou:
Sestroj rovnoramenný trojúhelník PQR, kde $PQ = 5 \text{ cm}$ a $\sphericalangle PQR = 70^\circ$.

Učivo na 1. stupni ZŠ:

- Bod, úsečka, přímka a polopřímka
- Různoběžky, rovnoběžky a kolmice
- Osa úsečky

Množiny bodů dané vlastnosti

- Učivo 8. Třídy

Množina musí být určena tak, aby bylo možné o každém prvku rozhodnout, zda do množiny patří nebo ne. Množiny (především ty, které mají nekonečně mnoho prvků) se určují pomocí tzv. charakteristické vlastnosti jejich prvků. Množiny se v aritmetice označují velkými tiskacími písmeny (A , N , ...) a prvky pak malými písmeny.

V geometrii je obvykle naopak, protože se např. úsečky, přímky nebo kružnice – což jsou množiny bodů – tradičně označují malými písmeny (p , r , a , ...)

Definice kružnice a kruhu (s využitím pojmu „množina“)

Kružnice je množina všech bodů v rovině, které mají od daného bodu S v rovině danou kladnou vzdálenost r .

Kruh je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu S v rovině vzdálenost menší nebo rovnou danému kladnému číslu r .

S čím se žáci zatím setkali?

a) $k = \{X \in \rho; |XS| = r\}$... kružnice

$\kappa = \{X \in \rho; |XS| \leq r\}$... kruh

b) znají základní poznatky o množinách

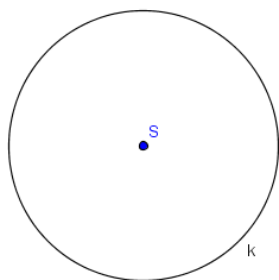
Zopakovat alespoň trochu kvalitně jednoduché konstrukční úlohy podle vět sss, sus, usu, Ssu.

Nyní rozdělit učivo na: - množiny bodů dané vlastností

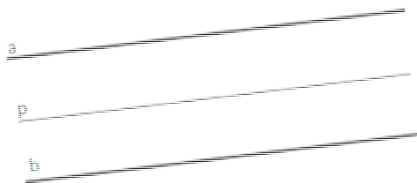
- množiny středů dané vlastností

1) množiny bodů

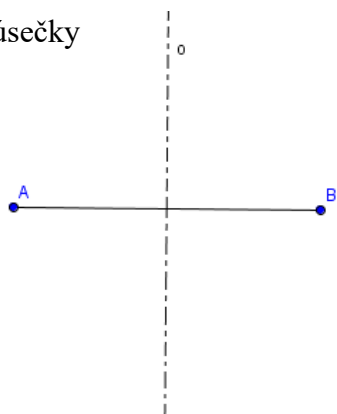
a) kružnice



b) 2 rovnoběžky v dané vzdálenosti



c) osa úsečky



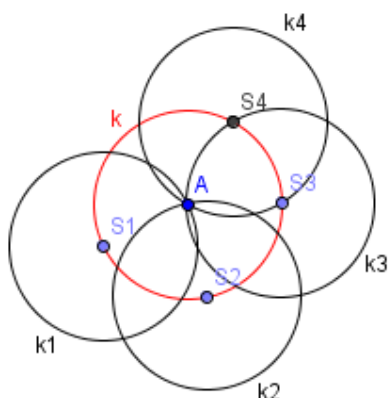
2) množina středů kružnic

Tady je vhodné, aby si žáci vystřihli alespoň tři kružnice různé velikosti ($r = 1\text{ cm}$, $r = 1,5\text{ cm}$, $r = 2\text{ cm}$) z tvrdého papíru a označili střed a v něm otvor. Můžeme také použít mince různé velikosti (ale tady nemají střed).

Potom by se měly řešit od jednoduchých úloh po více složitější. S průměrnými a slabými žáky jen nejzákladnější, které využijí při řešení konstrukčních úloh, s výbornými žáky i složitější.

a) Množiny středů kružnic se stejným poloměrem

- o Množina středů kružnic o stejném poloměru, které procházejí daným bodem – je kružnice o daném poloměru



- o Množina středů kružnic o daném poloměru, které se dotýkají dané přímky – jsou 2 rovnoběžky ve vzdálenosti poloměru od dané přímky

A10. Shodná zobrazení (izometrie) v rovině. Podobná zobrazení (podobnost) v rovině. Věty o podobnosti trojúhelníků.

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ V ROVINĚ (SPADÁ DO OBLASTI PLANIMETRIE)

Geometrickým zobrazením v rovině se rozumí předpis, který libovolnému bodu X roviny přiřazuje jako jeho obraz právě jeden bod X' téže roviny. Jestliže v daném zobrazení splývá bod X se svým obrazem X' , pak se bod $X=X'$ nazývá samodružným bodem daného zobrazení.

Nechť U je geometrický útvar a U' jeho obraz v daném zobrazení; jestliže obraz každého bodu útvaru U je opět bodem tohoto útvaru, pak obraz U' splývá s útwarem U a takový útvar $U=U'$ se nazývá samodružným útwarem daného zobrazení; je-li každý bod samodružného útvaru U samodružný, pak je útvar U tzv. **silně samodružný** v daném zobrazení, jinak je **slabě samodružný**.

Shodná zobrazení (shodnosti - izometrie) v rovině

Prosté zobrazení v rovině se nazývá shodným zobrazením nebo krátce shodností, právě, když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí $|X'Y'| = |XY|$, tj. **shodnost zachovává délku**. Zvláštním případem shodnosti je identita, v níž každému bodu X roviny je přiřazen tentýž bod $X'=X$.

Základní vlastnosti shodností:

- 1) Obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ s ní shodná ($|A'B'| = |AB|$)
- 2) Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky, tj. **shodnost zachovává rovnoběžnost**.
- 3) Obrazem každého trojúhelníka ABC je trojúhelník $A'B'C'$ s ním shodný.
 - Obrazem přímky AB je přímka $A'B'$, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
 - Obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
 - Obrazem poloroviny pA je polorovina $p'A'$, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
 - Obrazem úhlu AVB je úhel $A'YB'$ shodný s úhlem AVB
 - Obrazem útvaru U je útvar U' shodný s útwarem U (planimetrie pro gymple)

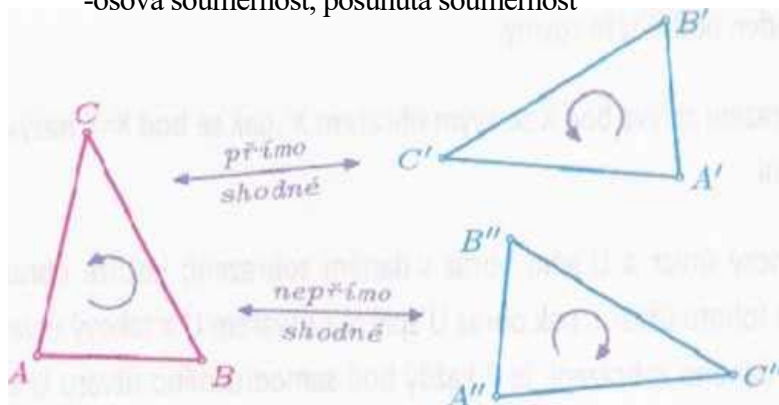
Dva geometrické útvary jsou shodné, jestliže mají stejný tvar a velikost. To lze zjistit přenesením jednoho rovinného obrazce na druhý. Abychom je nemuseli vystříhovat ze sešitu, používáme průsvitku (průsvitný papír). Porovnáváme-li dva obrazce pomocí průsvitky, v některých případech je nutné průsvitku obrátit.

Rozdělení shodností

- **Přímé** - libovolný trojúhelník a jeho obraz jsou přímo shodné, tj. mají souhlasnou orientaci vrcholů -identita, posunutí (translace), otočení (rotace), středová souměrnost
- **Nepřímé** - libovolný trojúhelník a jeho obraz jsou nepřímo shodné, tj. mají nesouhlasnou orientaci

vrcholů

-osová souměrnost, posunutá souměrnost



Skládání shodností:

Složením dvou přímých a dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost.

Složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost.

Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností.

Každou nepřímou shodnost lze složit ze středové souměrnosti a osové souměrnosti.

OSOVÁ SOUMĚRNOST (na základní škole)

Osová souměrnost O s osou o je nepřímá shodnost, která je jednoznačně určena osou souměrnosti O . Leží-li bod X na ose o , pak jeho obraz $X' = X$. Obrazem bodů $X \notin o$ jsou body X' , které leží na kolmici k ose o , přičemž úsečka XX' je osou půlena.

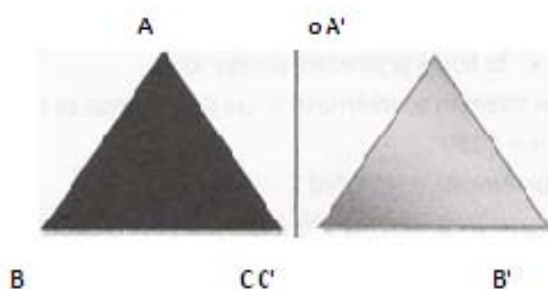
- Samodružnými body osové souměrnosti jsou právě všechny body osy souměrnosti. Bod, který splývá se svým obrazem, se nazývá samodružný bod. Stejně můžeme mluvit o samodružných přímkách, trojúhelnících, kružnicích atd.

- Samodružnými přímkami osové souměrnosti jsou osa o a všechny přímky k ose o kolmé. Obrazem přímky p rovnoběžné s osou o je rovnoběžka p' s osou souměrnosti.

Obrazem přímky $q \parallel o$ je přímka $q' \parallel o$; průsečík přímek q a q' leží na ose o .

Složením dvou přímých nebo dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost.

Příklad: Dva útvary, které jsou navzájem osově souměrné, jsou shodné, tj. $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.



O trojúhelnících ABC a $A'B'C'$ říkáme, že jsou souměrně samodružné podle přímky o .

Trojúhelník ABC označujeme jako vzor. Trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC v osové souměrnosti s osou o .

Značíme: $O(o): \triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$

Čteme: V osové souměrnosti podle osy o přejde trojúhelník ABC do trojúhelníku $A'B'C'$.

Rovněž o bodech A a A' , B a B' , C a C' říkáme, že jsou souměrně sdružené podle přímky o . Body A, B, C jsou vzory a body A', B', C' obrazy.

Značíme: $O(o): A \rightarrow A'$

$B \rightarrow B'$

$C \rightarrow C'$

Čteme: V osové souměrnosti podle osy o přejde bod A do bodu A' , bod B do bodu B' , bod C do bodu C' .

Poznámka:

Čtvercová síť usnadňuje nanášení kolmic i odměřování stejných vzdáleností.

Existují obrazce, které mají více os souměrnosti a naopak obrazce, které nemají žádnou osu souměrnosti. I některé písmena jsou osově souměrná ($A, B, C, O, D, E, H, I, K, M, \dots$)

Osa souměrnosti úsečky AB se nazývá osa úsečky. Je na danou úsečku kolmá a prochází jejím středem.

Zrcadlení - se jinak nazývá rovinová souměrnost. Rovina zrcátka je rovinou souměrnosti. Rovina souměrnosti vždy představuje pomyslné zrcadlo, ve kterém se jedna polovina tělesa zobrazí do druhé.

Z definice plyne, že osa je jednoznačně určena osou souměrnosti. Může však být také dána dvojicí různých bodů, jestliže každý z nich je obrazem druhého v této osové souměrnosti.

Využití: při řešení úloh o odrazu a o nejkratším spojení dvou bodů lomenou čarou. Základem řešení těchto úloh vlastnost přímky a jejího obrazu: odchylka přímky a osy o je stejná jako odchylka jejího obrazu a osy o .

Při konstrukci trojúhelníka, je-li z daných prvků dán součet nebo rozdíl stran.

STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST (na základní škole)

Středová souměrnost se středem S je přímá shodnost, která středu S přiřazuje týž bod $S'=S$ a každému bodu roviny $X \neq S$ přiřazuje takový bod X' , že bod S je středem úsečky XX' .

- Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti S . Lze ji považovat za otočení určené středem otočení S a úhlem otočení $\alpha = +180^\circ$.
- Jediným samodružným bodem středové souměrnosti je její střed S
- Samodružnými přímkami středové souměrnosti jsou všechny přímky, které procházejí středem

souměrnosti S.

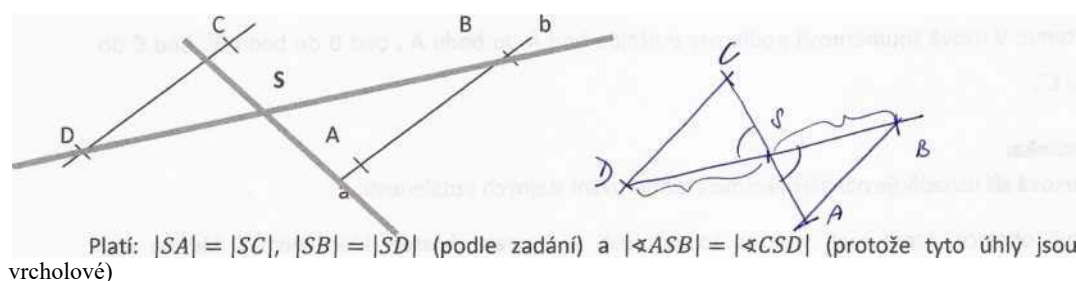
Ve středové souměrnosti platí:

1. Obrazem přímky, která neprochází středem souměrnosti, je přímka rovnoběžná se svým vzorem.
2. Obrazem přímky, která prochází středem souměrnosti, je přímka splývající se svým vzorem.
3. Obrazem dvou rovnoběžných přímek jsou opět dvě rovnoběžky.

Čtvercový papír - středová souměrnost.

Středově souměrné útvary jsou samodružné vzhledem ke středové souměrnosti, jejímž středem je střed souměrnosti.

Při ověřování shodnosti vzoru a obrazu u osové souměrnosti jsme museli průsvitku obrátit. U středové souměrnosti jsme průsvitku obrátit nemuseli. Odtud vyplývá rozdíl mezi souměrnostmi.



Trojúhelník ABS je shodný s trojúhelníkem CDS podle věty **sus**. Trojúhelníky mají odpovídající si strany shodné, a proto $AB \cong CD$ ($|AB| = |CD|$).

K nanesení dané úsečky na danou polopřímku používáme pravítko a kružítko, popř. proužek papíru.

Zjistili jsme: Jestliže je bod S středem úsečky AC a BD, jsou úsečky AB a CD shodné. Budeme říkat, že tyto úsečky jsou souměrně sdružené podle středu S. Zobrazení, které převádí úsečku AB v úsečku CD, se nazývá středová souměrnost, bod S je jejím středem.

Značení: $S(S): M \rightarrow M'$ (čteme: Ve středové souměrnosti podle středu S přejde bod M do bodu M')

Vzor a obraz ve středové souměrnosti jsou shodné útvary. Středová souměrnost je proto shodné zobrazení (zkráceně shodnost).

POSUNUTÍ (TRANSLACE) - v učivu ZŠ

Z fyziky víme, že síla, dráha přímočarého pohybu, rychlost jsou určeny, známe-li kromě jejich velikosti také směr. Ten znázorňujeme orientovanou úsečkou.

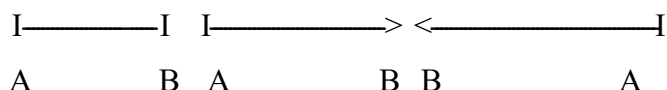
Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv. počáteční, druhý její krajní bod je koncovým bodem. Graficky znázorňujeme šipku u koncového bodu. Délka orientované úsečky

AB je úsečka AB. Mezi orientované úsečky řadíme i bod, kdy její počáteční i koncový bod splývá. Říkáme ji nulová orientovaná úsečka, její délka je rovna 0.

Dvě orientované úsečky AB a CD určují totéž posunutí, jestliže současně platí:

- Jsou rovnoběžné
- Mají stejnou velikost
- Mají stejnou orientaci (ta je vyznačena šipkou)

Jedna neorientovaná úsečka určuje dvě orientované úsečky.



Posunutí je jednoznačně určeno volbou orientované úsečky.

Posunutí (translace) T je přímá shodnost, která je jednoznačně určena nenulovým vektorem posunutí $\vec{u} = AA'$. Každému bodu roviny X je přiřazen jeho obraz X'tak, že platí $|XX'| = \vec{u}$.

- Velikost (délka) vektoru posunutí určuje délku posunutí, směr vektoru posunutí určuje směr posunutí (tzn. úsečky XX' a AA' jsou stejně dlouhé, rovnoběžné a souhlasně orientované).

- Jelikož $u \neq 0$, nemá posunutí žádné samodružné body.

- Samodružnými přímkami jsou všechny rovnoběžky s vektorem posunutí.

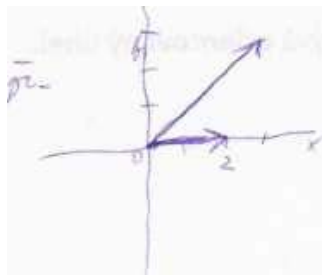
Značíme: P(XY): $A \rightarrow A'$

Čteme: V posunutí daném orientovanou úsečkou XY přejde bod A do bodu A'.

Posunutí je shodné zobrazení. Je to přímá shodnost.

Stejně jako jsme pracovali se středovou a osovou souměrností v pravoúhlé soustavě souřadnic, je možné v této soustavě studovat i posunutí.

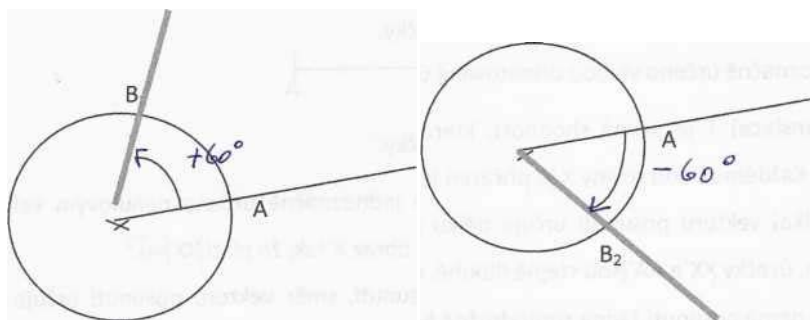
Víme, že jedno posunutí můžeme určit libovolným množstvím orientovaných úseček. Jestliže provádíme posunutí v soustavě souřadnic, je zvykem zvolit si pro určení posunutí takovou orientovanou úsečku, jejíž počáteční bod splyne s počátkem soustavy souřadnic. Posunutí pak charakterizujeme souřadnicemi koncového bodu.



OTÁČENÍ (ROTACE)- v učivu ZŠ

Otočení (rotace) R je shodné zobrazení, jednoznačně určené středem otočení S a orientovaným úhlem otočení α , jehož velikost je z intervalu $(0^\circ; 360^\circ)$. Bodu S je přiřazen týž bod $S' = S$, každý bod roviny $X \neq S$ má obraz X' , pro který platí $|SX| = |SX'|$ a $\angle XSX' = \alpha$.

- Obraz bodu X leží na kružnici otočení $k(S; r = SX)$, přičemž jeho poloha je dána orientovaným úhlem otočení: $\angle XSX' = \alpha$.
- Otočení má pro $\alpha = 360^\circ$ všechny body samodružné, jinak má jediný samodružný bod S .
- Samodružné přímky pro $\alpha \neq 180^\circ$ a $\alpha \neq 360^\circ$ nejsou žádné pro $\alpha = 180^\circ$ jsou samodružné všechny přímky procházející středem S , pro $\alpha = 360^\circ$ jsou samodružné všechny přímky roviny.
- Otočení vznikne složením dvou osových souměrností s různoběžnými osami.



Body B_1 a B_2 jsou obrazy bodu A v otočení kolem středu S o úhel velikosti 60° .

Samotná velikost úhlu je pro jednoznačné určení obrazu nedostačující. Hovoříme proto o otáčení v kladném a záporném smyslu.

Otáčením v kladném smyslu rozumíme otočení proti směru otáčení hodinových ručiček. Značíme znaménkem $+$. Otáčením v záporném smyslu rozumíme otočení ve směru otáčení hodinových ručiček. Značíme znaménkem $-$.

Zápis: $R(S, +60^\circ): A \rightarrow B_1$

Čteme: V otočení kolem středu S o úhel 60° v kladném smyslu přejde bod A do bodu B_1 .

Zápis: $R(S, -60^\circ): A \rightarrow B_2$

Čteme: V otočení kolem středu S o úhel 60° v záporném smyslu přejde bod A do bodu B_2 .

Úhel, u kterého je mimo velikost ještě udán smysl (např. $+60^\circ$), se nazývá **orientovaný úhel**.

Otočení je určeno středem, velikostí otáčení a smyslem otáčení.

Otáčení je shodné zobrazení, jedná se o přímou shodnost.

Podobná zobrazení (podobnost) v rovině

Prosté zobrazení v rovině se nazývá podobným zobrazením nebo krátce podobností, právě když pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' v tomto zobrazení platí $|X'Y'| = k|XY|$, kde $k > 0$ je dané konstanta zvaná koeficient podobnosti.

Podobnost se značí „ $\sim$ “ (Shodnost se značí „ $\cong$ “).

Zvláštním případem podobnosti je pro $k=1$ shodnost (identita).

Základní vlastnosti podobnosti:

1. Obrazem každé úsečky AB v podobnosti s koeficientem k je úsečka A'B' délky $|A'B'| = k|AB|$
2. Obrazy rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky, tj. podobnost zachovává rovnoběžnost
3. Obrazem každého trojúhelníka ABC je podobný trojúhelník A'B'C'.

Dva geometrické útvary nazýváme podobné, je-li možné jeden z nich zobrazit pomocí čtvercové sítě tak, že získáme dvojici shodných útvarů.

Shodnost je zvláštním případem podobnosti ($k=1$).

Pro dva podobné geometrické útvary platí, že mají stejný poměr délek všech dvojic odpovídajících si úseček, tj.

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \dots = k$$

Naopak, jestliže všechny dvojice odpovídajících si úseček mají stejný poměr délek, potom jsou dané útvary podobné.

Kladné reálné číslo **k** nazýváme **poměr podobnosti**.

Jestliže je $k > 1$, jedná se o zvětšení.

Jestliže je $k = 1$, jedná se o shodnost.

Jestliže je $k < 1$, jedná se o zmenšení.

Pro dva podobné geometrické útvary platí, že každé dva odpovídající si úhly jsou shodné.

Naopak, jestliže všechny dvojice sobě odpovídajících si úhlů jsou shodné, jsou dané útvary podobné.

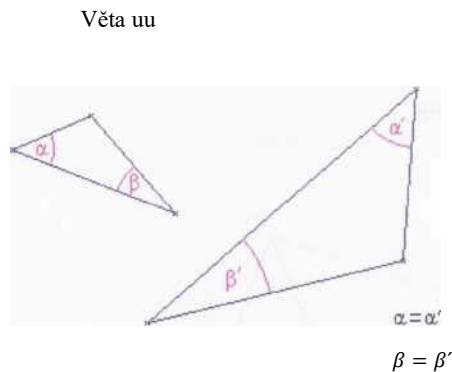
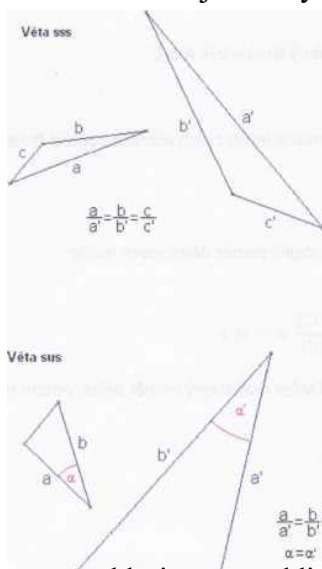
Jsou-li dva útvary U a U' podobné s poměrem podobnosti **k**, potom pro jejich obsahy S a S' platí $S' = k^2 \cdot S$, neboli $S' = k^2 \cdot S$.

Věty o podobnosti trojúhelníků

Stejně jako u shodnosti i u podobnosti platí, že chceme-li zjistit, zda jsou dva trojúhelníky podobné, stačí porovnat jen některé jejich strany a úhly. O podobnosti trojúhelníků mluví následující tři věty:

- **Věta sss:** Jestliže dva trojúhelníky mají sobě rovny poměry délek všech dvojic odpovídajících si stran, pak jsou podobné.
- **Věta sus:** Jestliže dva trojúhelníky mají stejný poměr délek dvou párů odpovídajících si stran a shodují se v úhlu jimi sevřeném, pak jsou podobné.

- **Věta uu:** Jestliže se dva trojúhelníky shodují ve dvou vnitřních úhlech, pak jsou podobné.



Věta uu by se mohla jmenovat klidně uuu. Když se dva trojúhelníky shodují ve dvou úhlech, tak se shodují i v tom třetím. Oboum trojúhelníkům totiž chybí stejný úhel do 180° . Pro ty, kteří mají rádi historii : pomocí podobnosti trojúhelníků sestrojil Thalet z Milétu (7.-6. stol. př. n. I.) dálkoměr.

Věty vyplývající z podobnosti trojúhelníků:

1. Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li jejich odpovídající si strany rovnoběžné, nebo navzájem kolmé.
2. Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru dvou odpovídajících si stran.
3. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu.
4. Každé dva rovnostranné trojúhelníky jsou si podobné.

STEJNOLEHLOST

Stejnolehlost se středem S a koeficientem k (kde k je různé od nuly) je přímá podobnost, která:

1. bodu S přiřazuje obraz $S' = S$
2. bodu X různému od S přiřazuje obraz X' tak, že platí $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ a přitom bod X' leží na polopřímce SX pro $k > 0$ (obr. a), resp. bod X' leží na polopřímce opačné k polopřímce SX pro $k < 0$ (obr. b)

Stejnolehlost je jednoznačně určena středem S a koeficientem k .

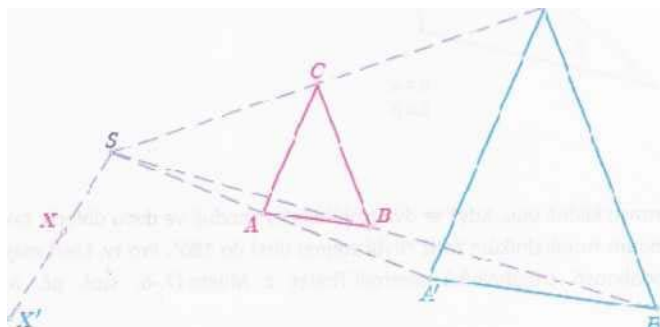
Stejnolehlost se středem S a koeficientem $k = -1$ je středová souměrnost se středem S ; stejnolehlost s koeficientem $k = 1$ je identita.

Pro k různé od jedné je samodružným bodem právě jen střed S , slabě samodružné jsou všechny přímky

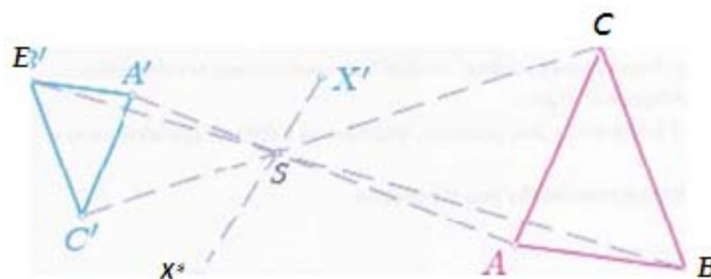
procházející bodem S.

Je-li přímka p' obrazem přímky p v dané stejnolehlosti, pak jsou přímky p, p' rovnoběžné. Obraz U' omezeného útvaru U je zvětšený pro $|k| > 1$ a zmenšený pro $|k| < 1$.

Každé dvě kružnice v rovině jsou stejnolehlé, a) $k > 0$ a $|k| > 1$



b) $k < 0$ a $|k| < 1$



Bod, který splývá se svým obrazem, se nazývá **samodružný bod**. Stejnolehlost má jediný samodružný bod, a to střed stejnolehlosti.

Útvar a jeho obraz ve stejnolehlosti $H(S, k)$ jsou podobné útvary. Poměr podobnosti k je potom roven absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti $|k|$.

Ve stejnolehlosti platí:

1. Obrazem přímky, která neprochází středem stejnolehlosti, je přímka rovnoběžná se svým vzorem.
2. Obrazem přímky, která prochází středem stejnolehlosti, je přímka splývající se svým vzorem.
3. Obrazem dvou rovnoběžných přímek jsou opět dvě rovnoběžky.

B1a. Matematika jako komponenta kurikulárních dokumentů sekundární školy, školská matematika v RVP, didaktická analýza učiva matematiky v sekundární škole

MATEMATIKA = je věda o číslech a geometrických útvarech (věda o kvantitativních a prostorových vztazích reálného světa).

Pedagogická věda rozlišuje:

- a) **Obecnou didaktiku** vymezujeme jako teorii vzdělávání a vyučování
- b) **Speciální didaktiku** (*předmětovou – didaktika matematiky*) je vědou se svou vlastní strukturou, logikou a způsobem myšlení

Dimenze didaktiky matematiky

- **Obsahová** -vzdělávací obsah, učivo, tzn. školská matematika jako výběr a transformace poznatků matematické vědy do didaktického systému příslušného druhu a stupně školy
- **Pedagogická** – metody a postupy vyučování ve smyslu činnosti učitele, poznávací procesy žáků
- **Psychologická** – motivační aspekt ve vyučování a učení žáků
- **Konstruktivní** – cíle vyučování, projektování, realizace a evaluace, zaměřené k jednání učitele v konkrétní situaci

POJETÍ VYUČOVACÍHO PŘEDMĚTU

Stává se jedním ze základních problémů

- Orientováno spíše teoreticky – např. důraz kladen na obsahový aspekt
- praktická příprava žáka – např. osvojení dovedností řešení určitých typů úloh

cíle práce učitele

- nejen naučit předepsané učivo, ale především formovat osobnost žáka
- změnit jeho vztah k práci
- vytvářet a rozvíjet jeho pozitivní vztah k matematice

ŠKOLSKÁ MATEMATIKA V RVP

Školská matematika = musí žáka vybavit základními kompetencemi, aby se mohl uplatnit v praktickém životě

Cílové zaměření (klíčové kompetence)

- využívání matematických poznatků a dovedností v praktických činnostech
- rozvíjení paměti žáků prostřednictvím numerických výpočtů

- rozvíjení kombinatorického a logického myšlení, ke kritickému usuzování a srozumitelné a věcné argumentaci
- rozvíjení abstraktního a exaktního myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů
- vytváření zásoby matematických nástrojů a k efektivnímu využívání osvojeného matematického aparátu
- vnímání složitostí reálného světa a jeho porozumění
- provádění rozboru problému a plánu řešení, odhadování výsledků, volbě správného postupu k vyřešení problému a vyhodnocování správnosti výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- přesnému a stručnému vyjadřování užíváním matematického jazyka včetně symboliky, prováděním rozborů a zápisů při řešení úloh a ke zdokonalování grafického projevu
- rozvíjení spolupráce při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z běžného života a následně využití získaného řešení v praxi
- rozvíjení důvěry ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, k soustavné sebekontrolě při každém kroku postupu řešení, k rozvíjení systematičnosti, vytrvalosti a přesnosti, k vytváření dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušenosti nebo pokusu a k jejich ověřování nebo vyvrácení pomocí protipříkladů

Vzdělávací oblast *Matematika a její aplikace* je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích.

Je rozdělena na čtyři tematické okruhy:

- **číslo a proměnná**
- **závislosti, vztahy a práce s daty**
- **geometrie v rovině a v prostoru**
- **nestandardní aplikační úlohy a problémy**

1. STUPEŇ

ČÍSLO A POČETNÍ OPERACE

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- ⌚ *používá přirozená čísla k modelování reálných situací, počítá předměty v daném souboru, vytváří soubory s daným počtem prvků*
- ⌚ *čte, zapisuje a porovnává přirozená čísla do 1 000, užívá a zapisuje vztah rovnosti a nerovnosti*
- ⌚ *užívá lineární uspořádání; zobrazí číslo na číselné ose*
- ⌚ *provádí z paměti jednoduché početní operace s přirozenými čísly*
- ⌚ *řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje a modeluje osvojené početní operace*

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- ⌚ *využívá při pamětném i písemném počítání komutativnost a asociativnost sčítání a násobení*
- ⌚ *provádí písemné početní operace v oboru přirozených čísel*
- ⌚ *zaokrouhluje přirozená čísla, provádí odhady a kontroluje výsledky početních operací v oboru přirozených čísel*
- ⌚ *řeší a tvoří úlohy, ve kterých aplikuje osvojené početní operace v celém oboru přirozených čísel*

Učivo

- ⌚ obor přirozených čísel
- ⌚ zápis čísla v desítkové soustavě, číselná osa
- ⌚ násobilka
- ⌚ vlastnosti početních operací s přirozenými čísly
- ⌚ písemné algoritmy početních operací

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- ⌚ *orientuje se v čase, provádí jednoduché převody jednotek času*
- ⌚ *popisuje jednoduché závislosti z praktického života*
- ⌚ *doplňuje tabulky, schémata, posloupnosti čísel*

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- ⌚ *vyhledává, sbírá a třídí data*
- ⌚ *čte a sestavuje jednoduché tabulky a diagramy*

Učivo

- ⌚ závislosti a jejich vlastnosti
- ⌚ diagramy, grafy, tabulky, jízdní řády

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy – 1. období

žák

- ⌚ *rozezná, pojmenuje, vymodeluje a popíše základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa; nachází v realitě jejich reprezentaci*
- ⌚ *porovnává velikost útvarů, měří a odhaduje délku úsečky*
- ⌚ *rozezná a modeluje jednoduché souměrné útvary v rovině*

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- ⌚ *narysuje a znázorní základní rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník a kružnici); užívá jednoduché konstrukce*
- ⌚ *sčítá a odčítá graficky úsečky; určí délku lomené čáry, obvod mnohoúhelníku sečtením délek jeho stran*
- ⌚ *sestrojí rovnoběžky a kolmice*
- ⌚ *určí obsah obrazce pomocí čtvercové sítě a užívá základní jednotky obsahu*
- ⌚ *rozpozná a znázorní ve čtvercové síti jednoduché osově souměrné útvary a určí osu souměrnosti útvaru překládáním papíru*

Učivo

- ⌚ **základní útvary v rovině** – lomená čára, přímka, polopřímka, úsečka, čtverec, kružnice, obdélník, trojúhelník, kruh, čtyřúhelník, mnohoúhelník
- ⌚ **základní útvary v prostoru** – kvádr, krychle, jehlan, koule, kužel, válec
- ⌚ **délka úsečky; jednotky délky a jejich převody**
- ⌚ **obvod a obsah obrazce**
- ⌚ **vzájemná poloha dvou přímek v rovině**
- ⌚ **osově souměrné útvary**

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy – 2. období

žák

- ⌚ *řeší jednoduché praktické slovní úlohy a problémy, jejichž řešení je do značné míry nezávislé na obvyklých postupech a algoritmech školské matematiky*

Učivo

- ⌚ **slovní úlohy**
- ⌚ **číselné a obrázkové řady**
- ⌚ **magické čtverce**
- ⌚ **prostorová představivost**

2. STUPEŇ

ČÍSLO A PROMĚNNÁ

Očekávané výstupy

žák

- ⌚ *provádí početní operace v oboru celých a racionálních čísel; užívá ve výpočtech druhou mocninu a odmocninu*
- ⌚ *zaokrouhluje a provádí odhady s danou přesností, účelně využívá kalkulačtor*
- ⌚ *modeluje a řeší situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel*
- ⌚ *užívá různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu celek – část (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)*
- ⌚ *řeší modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracuje s měřítky map a plánů*
- ⌚ *řeší aplikační úlohy na procenta (i pro případ, že procentová část je větší než celek)*
- ⌚ *matematizuje jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určí hodnotu výrazu, sčítá a násobí mnohočleny, provádí rozklad mnohočlenu na součin pomocí vzorců a vytýkáním*
- ⌚ *formuluje a řeší reálnou situaci pomocí rovnic a jejich soustav*
- ⌚ *analyzuje a řeší jednoduché problémy, modeluje konkrétní situace, v nichž využívá matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel*

Učivo

- ⌚ **dělitelnost přirozených čísel** – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti
- ⌚ **celá čísla** – čísla navzájem opačná, číselná osa
- ⌚ **desetinná čísla, zlomky** – rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě; převrácené číslo, smíšené číslo, složený zlomek
- ⌚ **poměr** – měřítko, úměra, trojčlenka
- ⌚ **procenta** – procento, promile; základ, procentová část, počet procent; jednoduché úrokování
- ⌚ **mocniny a odmocniny** – druhá mocnina a odmocnina
- ⌚ **výrazy** – číselný výraz a jeho hodnota; proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny
- ⌚ **rovnice** – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými

ZÁVISLOSTI, VZTAHY A PRÁCE S DATY

Očekávané výstupy

žák

- ⌚ *vyhledává, vyhodnocuje a zpracovává data*
- ⌚ *porovnává soubory dat*
- ⌚ *určuje vztah přímé anebo nepřímé úměrnosti*
- ⌚ *vyjádří funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem*
- ⌚ *matematizuje jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů*

Učivo

- ⌚ **závislosti a data** – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky; četnost znaku, aritmetický průměr
- ⌚ **funkce** – pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce

GEOMETRIE V ROVINĚ A V PROSTORU

Očekávané výstupy

žák

- ⌚ *zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; využívá potřebnou matematickou symboliku*
- ⌚ *charakterizuje a třídí základní rovinné útvary*
- ⌚ *určuje velikost úhlu měřením a výpočtem*
- ⌚ *odhaduje a vypočítá obsah a obvod základních rovinných útvarů*
- ⌚ *využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh*
- ⌚ *načrtne a sestrojí rovinné útvary*
- ⌚ *užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků*
- ⌚ *načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar*
- ⌚ *určuje a charakterizuje základní prostorové útvary (tělesa), analyzuje jejich vlastnosti*
- ⌚ *odhaduje a vypočítá objem a povrch těles*
- ⌚ *načrtne a sestrojí síť základních těles*
- ⌚ *načrtne a sestrojí obraz jednoduchých těles v rovině*
- ⌚ *analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu*

Učivo

- ⌚ **rovinné útvary** – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)
- ⌚ **metrické vlastnosti v rovině** – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta

- ⌚ **prostorové útvary** – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol
- ⌚ **konstrukční úlohy** – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost

NESTANDARDNÍ APLIKAČNÍ ÚLOHY A PROBLÉMY

Očekávané výstupy - žák

- ☐ užívá logickou úvahu a kombinační úsudek při řešení úloh a problémů a nalézá různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
- ☐ řeší úlohy na prostorovou představivost, aplikuje a kombinuje poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

Učivo

- ⌚ číselné a logické řady; číselné a obrázkové analogie; logické a netradiční geometrické úlohy

Charakteristika vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití.

Vzdělávací obsah vzdělávacího oboru **Matematika a její aplikace** je rozdělen na čtyři tematické okruhy. V tematickém okruhu *Čísla a početní operace* na prvním stupni, na který navazuje a dále ho prohlubuje na druhém stupni tematický okruh *Číslo a proměnná*, si žáci osvojují aritmetické operace v jejich třech složkách: dovednost provádět operaci, algoritmičké porozumění (proč je operace prováděna předloženým postupem) a významové porozumění (umět operaci propojit s reálnou situací). Učí se získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním. Seznamují se s pojmem proměnná a s její rolí při matematizaci reálných situací.

V dalším tematickém okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* žáci rozpoznávají určité typy změn a závislostí, které jsou projevem běžných jevů reálného světa, a seznamují se s jejich reprezentacemi. Uvědomují si změny a závislosti známých jevů, docházejí k pochopení, že změnou může být růst i pokles a že změna může mít také nulovou hodnotu. Tyto změny a závislosti žáci analyzují z tabulek, diagramů a grafů, v jednoduchých případech je konstruují a vyjadřují matematickým předpisem nebo je podle možností modelují s využitím vhodného počítačového software nebo grafických kalkulátorů. Zkoumání těchto závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce.

V tematickém okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Důležitou součástí matematického vzdělávání jsou *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*, jejichž řešení může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení. Tyto úlohy by měly prolínat všemi tematickými okruhy v průběhu celého základního vzdělávání. Žáci se učí řešit problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém, utřídit údaje a podmínky, provádět situační náčrt, řešit optimalizační úlohy. Řešení logických úloh, jejichž obtížnost je závislá na míře rozumové vyspělosti žáků, posiluje vědomí žáka ve vlastní schopnosti logického uvažování a může podchytit i ty žáky, kteří jsou v matematice méně úspěšní.

Žáci se učí využívat prostředky výpočetní techniky (především kalkulátory, vhodný počítačový software, určité typy výukových programů) a používat některé další pomůcky, což umožňuje přístup k matematice i žákům, kteří mají nedostatky v numerickém počítání a v rýsovacích technikách. Zdokonalují se rovněž v samostatné a kritické práci se zdroji informací.

DIDAKTICKÁ ANALÝZA UČIVA MATEMATIKY V SEKUNDÁRNÍ ŠKOLE

Didaktická analýza je hlubší myšlenková činnost učitele, která mu umožní z pedagogického hlediska proniknout do učební látky – snaha vystihnout výchovnou a vzdělávací hodnotu látky

- kombinace analýzy základních pojmů a vztahů v učivu + analýzy základních činností + analýzy mezipředmětových vazeb

Východiska

- **Pojmová analýza:** vychází ze známých (osvojených) pojmů a postupuje k pojmům novým
 - Dobrá orientace v základním učivu a na to navazuje učivo prohlubující a rozšiřující popř. pomocné a doplňkové
- **Operační analýza:** analýza činností a operací, které musí učitel a žáci s učivem provádět (učivem jsou nejen vědomosti, ale i dovednosti)
 - Zařazování takových úloh, které rozvíjí dovednosti u žáka
- **Analýza z hlediska mezipředmětových vztahů:** pohled na učivo z více stran (návaznost učiva)
 - Rozbor časové i obsahové návaznosti učiva v rámci ŠVP

Metodický postup

- je několik postupů jak provádět didaktickou analýzu (záleží na času, druhu předmětu,...)
1. **znalost výukového cíle daného předmětu**
 2. **pedagogická diagnostika třídy**
 3. **tvorba základní struktury učiva**
 4. **struktura činnosti žáků v hodině**
 5. **výběr výukových metod, forem a prostředků**
 6. **nalezení výchovných hodnot a mezipředmětových vazeb v učivu**
-
1. **ujasnít si téma**
 2. **stanovení výukového cíle**
 3. **mít určitou představu o konkrétní třídě**
 4. **připomenout pro sebe co učivo tvoří**
 - poznatky (stávají se vědomostmi); senzomotorické výkony (stávají se dovednostmi); myšlenkové operace; postoje, potřeby, zájmy a charakterové vlastnosti
 5. **základní struktura učiva – stěžejní body**
 6. **navozované činnosti žáka – operační analýza**
 7. **výběr vyučovacích metod, forem a prostředků včetně učebních pomůcek**
 8. **promýšlení motivačního rámce vyučovací hodiny a scénář hodiny**
 9. **výchovné hodnoty**

B1b. Dělitel a násobek, prvočíslo, číslo složené, ciferný součet, Eratosthenovo síto, znaky dělitelnosti, rozklad na prvočinitele, nejmenší společný násobek a největší společný dělitel.

Dělitel

- je binární operace mezi 2 čísly daného oboru, která je opačná k operaci násobení.
- je vlastnost celých čísel. Celé číslo p je **dělitelné** nenulovým celým číslem q (číslo q dělí p), jestliže existuje takové celé číslo k , pro které platí, že $p = kq$.

Např. číslo 27 je dělitelné třemi, neboť $27 = 9 \cdot 3$. Alternativně je p dělitelné q , jestliže zbytek po dělení p / q je nula.

- Číslo p se nazývá dělenec,
- Číslo q se nazývá dělitel,
- Číslo k se nazývá podíl čísla p při dělení číslem q ,
- V oboru celých čísel mají čísla p a $-p$ tytéž dělitele,
- Čísla 1, -1, p a $-p$ se nazývají nevlastní (triviální) dělitelé čísel p a $-p$,
- Existují – li ještě další dělitelé, nazývají se vlastní dělitelé (netriviální),
- Každé celé číslo mimo nuly je dělitelem nuly, nula ale není dělitelem žádného celého čísla různého od nuly,
- Pokud b je dělitelné a , píše se $a \mid b$ (a dělí b)

Násobek

- Číslo, které je číslem dělitelné,

Násobení

- Jedna ze 4 základních početních operací v aritmetice
- Násobení přirozených čísel je jejich opětovné sčítání

Sudé a liché číslo

Celé číslo dělitelné dvěma se nazývá *sudé*. Pokud číslo není sudé, nazývá se *liché*.

Prvočíslo

Čísla, která mají právě dva dělitele (číslo 1 a sebe samo) a čísla, která mají více, jak dva dělitele se nazývají **složená čísla**. Číslo 1 není ani prvočíslo ani složené číslo, protože má jen jednoho dělitele a to 1.

Prvočinitel

Prvočíslo, které dělí číslo p , se nazývá prvočinitel. Každé složené číslo lze napsat jako součin prvočinitelů. Tento zápis (pokud nebereme v úvahu pořadí prvočinitelů) je pro každé číslo jedinečný.

Toto slovo vzniklo spojením dvou matematických pojmů a to prvočíslo a činitel (člen početní operace např. $4 * 5 = 20$, kdy 4,5 jsou činitelé a 20 je součin).

Ciferný součet

Ciferným součtem daného čísla v dané číselné soustavě rozumíme součet všech cifer (číslí) v jeho zápisu v této číselné soustavě.

Eratosthenovo síto

Je jednoduchý algoritmus pro nalezení všech prvočísel menších než zadaná horní mez. Je pojmenován po řeckém matematikovi Eratosthenovi z Kyrény, který žil v letech 276 – 194 př. n. l.

Algoritmus funguje „prosíváním“ seznamu čísel – na počátku seznam obsahuje všechna čísla v daném rozsahu (2, 3, 4, ..., zadané maximum). Poté se opakovaně první číslo ze seznamu vyjme, toto číslo je prvočíslem; ze seznamu se pak odstraní všechny násobky tohoto čísla (což jsou čísla složená). Tak se pokračuje do doby, než je ze seznamu odstraněno poslední číslo (nebo ve chvíli, kdy je jako prvočíslo označeno číslo vyšší než odmocnina nejvyššího čísla – v takové chvíli už všechna zbývajících čísla jsou nutně prvočísla). Časová složitost tohoto algoritmu je $O(N * \log(\log N))$, kde N je horní mez rozsahu.

Pro nalezení prvočísel mezi prvními 20 čísly:

Krok 1: Seznam obsahuje všechna čísla v rozsahu 2–20:

Seznam: 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Krok 2: Odebereme první číslo ze seznamu (**2**) a označíme ho jako prvočíslo:

Známá prvočísla: **2**

Seznam: 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Krok 3: Odebereme ze seznamu všechny násobky právě odebraného prvočísla (4, 6, 8, 10, ...):

Známá prvočísla: 2

Seznam: 3 5 7 9 11 13 15 17 19

Krok 4: Pokračujeme opět krokem 2, dokud zbývají nějaká čísla (první číslo v seznamu a také prvočíslo je tentokrát **3**):

Známá prvočísla: 2 **3**

Seznam: 5 7 11 13 17 19

Po dalším opakování:

Známá prvočísla: 2 3 5

Seznam: 7 11 13 17 19

5 je vyšší než $\sqrt{19}$, takže zbývají už jen prvočísla. (Kdyby ještě existovalo v seznamu číslo X , které je součinem dvou celých čísel $A \cdot B$, musel by např. činitel A být menší než (nebo roven) $\sqrt{X}$ a druhý činitel B pak větší než (nebo roven) $\sqrt{X}$. Všechny násobky celých čísel menších než $\sqrt{20}$ jsou již ale ze seznamu odebrány, včetně X . Tím pádem se již v seznamu nenachází žádné číslo, které lze rozložit na součin.)

Výsledný seznam prvočísel v rozsahu 2–20: **2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.**

Znaky dělitelnosti

- Číslo je dělitelné **dvěma**, když je na konci sudé číslo.
- Číslo je dělitelné **třemi**, právě když je dělitelný součet třemi součet čísel zapsaných jeho jednotlivými ciframi, tzv. ciferný součet.
- Číslo je dělitelné **čtyřmi**, právě když je čtyřmi dělitelné jeho poslední dvojčíslí.
- Číslo je dělitelné **pěti**, právě když má na místě jednotek číslici nula nebo pět.
- Číslo je dělitelné **šesti**, právě když je zároveň dělitelné dvěma a třemi.
- Číslo je dělitelné **osmi**, je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné osmi.
- Číslo je dělitelné **devíti**, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti.
- Číslo je dělitelné **desíti**, má-li na místě jednotek číslici nulu.

Rozklad na prvočinitele - vyjádření celého čísla ve tvaru součinu kde $p_1, \dots, p_n$ jsou navzájem různá prvočísla (prvočinitelé) a $a_1, \dots, a_n$ jsou přirozená čísla. Každé celé číslo, s výjimkou čísel 0, 1, -1, je možné v takovém tvaru vyjádřit jednoznačně až na pořadí činitelů.

Např. $60 = 2^2 * 3^1 * 5$

Nejmenší společný násobek – NSN dvou nebo více čísel je nejmenší číslo, které je těmito čísly dělitelné. Nejmenší společný násobek dvou čísel lze nalézt tak, že každé z čísel je rozloženo na součin prvočísel (tzv. prvočíselný rozklad) a výsledný NSN je součinem čísel, která se vyskytují v rozkladu prvního nebo druhého čísla a u každého z nich použijí maximální mocninu, ve které se vyskytuje.

Největší společný dělitel – NSD dvou nebo více čísel je největší číslo, kterým jsou všechna čísla dělitelná. Největší společný dělitel dvou čísel lze nalézt tak, že každé z čísel je rozloženo na součin prvočísel a vynásobíme taková prvočísla, která se vyskytují ve všech rozkladech a vybereme to číslo, které má nejmenší mocninu.

Součin největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku dvou čísel se rovná součinu těchto dvou čísel.

$NSD(a,b) * NSN(a, b) = a * b$

Dvě čísla se nazývají **soudělná**, když mají společného dělitele většího než 1. Pokud takového dělitele nemají, pak se nazývají **nesoudělná**.

Dělitelnost čísla 7, 11 a 13 se na základních školách kvůli své obtížnosti neučí. Ale pro talentované žáky a pro žáky se zájmem o matematiku je můžeme v hodinách matematiky či matematických kroužcích uvést.

Tyto dělitelnosti jsou spojeny s pojmem kongruence.

Čísla a a b jsou kongruentní podle modulu m , jestliže rozdíl $(a - b)$ je dělitelný číslem m .

Každé víceciferné číslo můžeme zapsat ve tvaru mnohočlenu seřazeného podle mocnin 10 (např. $123456 = 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$). Proto se vyšetřuje kongruence jednotlivých mocnin čísla 10 podle daného modulu.

Pro dělitelnost 7, tato kongruence čísla 10 podle modulu 7, vypadá takto:

$$10^0 = 1 \pmod{7}, \text{ neboť } 1-1 = 0 \text{ (0 je dělitelná 7)}$$

$$10^1 = 3 \pmod{7}, \text{ neboť } 10-3 = 7 \text{ (7 je dělitelné 7)}$$

$$10^2 = 2 \pmod{7}, \text{ neboť } 100-2 = 98 \text{ (98 je dělitelné 7)}$$

$$10^3 = 6 \pmod{7}, \text{ neboť } 1000-6 = 994 \text{ (994 je dělitelná 7)}$$

$$10^4 = 4 \pmod{7}, \text{ neboť } 10\,000-4 = 9996 \text{ (9996 je dělitelná 7)}$$

$$10^5 = 5 \pmod{7}, \text{ neboť } 100\,000-5 = 99\,995 \text{ (99\,995 je dělitelná 7)}$$

Kdybychom vyšetřovali další mocniny čísla 10, zjistili bychom, že posloupnost čísel 1,3,2,6,4,5 se opakuje.

Tuto kongruenci můžeme podobně provést také pro číslo 10 podle modulu 11 či podle modulu 13.

Vždy nám vyjdou charakteristické posloupnosti pro tyto dělitele, podle kterých byly stanoveny následující pravidla pro dělitelnosti 7,11 a 13.

Dělitelnost 7:

Číslo je dělitelné sedmi, je – li sedmi dělitelný součet vypočtený tak, že se první až n -tá číslice od zadu vynásobí postupně čísly (periodicky se opakujícími): 1, 3, 2, 6, 4, 5.

Například číslo 1358 je dělitelné sedmi, neboť: $8 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 6 = 35$, což je dělitelné sedmi.

Zda je číslo dělitelné sedmi lze vypočítat i jinými metodami.

Například tímto postupem: Ze zadaného čísla odstraníme poslední číslici, vynásobíme ji dvěma a tento násobek odečteme od zbylého čísla. V případě, že je výsledkem záporné číslo a je dvojmístné, pak odstraníme znaménko mínus. Tyto kroky opakujeme dokud neskončíme u jednociferného čísla. Pokud je toto číslo dělitelné sedmi, tak je původní číslo také dělitelné sedmi.

Například u čísla 1358 zjistíme dělitelnost sedmi takto:

$$135 + (8 * 2) = 119$$

$$11 - (9 * 2) = -7$$

Dělitelnost sedmi lze také vypočítat tak, že zadané číslo rozdělíme do skupin po dvou a postupně násobíme mocninami čísla 2. Například u čísla 1358 to bude vypadat takto: $13 * 2^1 + 58 * 2^0 = 26 + 58 = 84$, což je dělitelné sedmi.

Dělitelnost 11

Číslo je dělitelné jedenácti, je – li rozdíl součtu číslic na sudém a lichém místě dělitelný jedenácti.

Neboli, je – li součet vypočtený tak, že se první až n-tá číslice od zadu vynásobí postupně čísla (periodicky se opakujícími): -1, 1.

Například číslo 71 973 je dělitelné jedenácti, neboť: $3 * (-1) + 7 * 1 + 9 * (-1) + 1 * 1 + 7 * (-1) = -11$, což je dělitelné jedenácti.

Dělitelnost 13

Číslo je dělitelné třinácti, je – li třinácti dělitelný součet vypočtený tak, že se první až n-tá číslice od zadu vynásobí postupně čísla (periodicky se opakujícími): 1, -3, -4, -1, 3, 4.

Například číslo 12 831 je dělitelné třinácti, neboť $1 * 1 + 3 * (-3) + 8 * (-4) + 2 * (-1) + 1 * 3 = -39$, což je dělitelné třinácti.

B2a. Modernizace matematického vzdělávání, základní trendy vývoje, zahraniční náměty a zkušenosti, transmisivní a konstruktivistické přístupy k matematickému vzdělávání. Didaktická transformace matematických pojmů na základní škole

MODERNIZACE MATEMATICKÉHO VZDĚLÁVÁNÍ

Začátek 20. století – první pokusy o překonání rozporu mezi poznatky matematiky jako vědy a školské matematiky

Tendence

- **Erlangenský program** – představuje významný mezník v geometrii, v roce 1872 Felix Klein vyslovil definici geometrie = **zkoumání invariantů vůči transformační grupě** – jeho cílem je zformulovat obecný princip, který by jednotlivé geometrie jasně a jednoznačně vymezil a logicky uspořádal
 - *Metrická geometrie* – zkoumá invarianty vůči grupě shodných zobrazení
 - *Afinní geometrie* – zkoumá invarianty vůči grupě afinních zobrazení (dělicí poměr)
 - *Projektivní geometrie* – zkoumá invarianty vůči grupě kolineací (dvojpoměr) → z ní se vyloupily *alternativní geometrie* (hyperbolická, eliptická, parabolická = euklidovská geometrie)
 - ◆ **EUKLIDOVSKÁ GEOMETRIE** – zkoumají invarianty vůči grupě kolineací reprodukcující izotopické přímky (jsou komplexně sdružené)
- **Nicolas Bourbaki** – vznikl jako studentská recese v roce 1935 (skupina převážně francouzských matematiků), která psala sérii knih, v nichž představovala výklad moderní vyšší matematiky. Záměrem těchto matematiků bylo vybudovat celou matematiku na základě teorie množin – tím měla být matematika plně axiomatizována a postavena na pevný základ.
 - Vydali devět titulů – teorie množin, algebra, topologie, funkce jedné reálné proměnné, topologické vektorové prostory, integrace, komutativní algebra, lieovy grupy a algebry, spektrální teorie

ZÁKLADNÍ TRENDY VÝVOJE

- Matematika pro všechny

60. - 70. léta: pozornost byla věnována struktuře poznatků z pohledu matematiky. Vycházelo z důvěry, že dobře uspořádaný obsah umožní žákům rychlé a správné porozumění

70. - 80. léta: podstatnou složku představoval výzkum vlivů a výsledků nových osnov a přístupů na vyučování, toto všechno vedlo k příklonu k hlavnímu výzkumu – zájem o učení žáků

80. léta: učitelova profese je vnímána jako celek, důležitou podmínkou je kontext ve kterém se žák učí

90. léta: přibyla problematika žákovských představ o matematice a faktory, které ji ovlivňují. Jednou z hlavních otázek je zkoumání matematické třídy se zřetelem ke komunikaci, která v ní probíhá a její sociologii.

ZAHRANIČNÍ NÁMĚTY A ZKUŠENOSTI

- **Hans Freudenthal** - ukázat matematiku s lidskou tvářím aby ji děti měli rádi tzv.matematické realistické vyučování
- **Anna Zofie Krygowska** – teorie činnostního vyučování (aby ve vyučování pracovali)
- **Guy Brousseau** – nejrozpracovanější koncepce matematiky, propagátor teorie didaktických situací v matematice (rozdíl mezi tím, kdy se ve vyučování tvoří a kdy se produkuje)

TRANSMISIVNÍ A KONSTRUKTIVISTICKÉ PŘÍSTUPY

TRANSMISIVNÍ PŘÍSTUP (staré paradigma)

- *Výuka* = přenos hotových poznatků od těch, kteří vědí (z učitelovy mysli či z jiných zdrojů včetně elektronických) k těm, kteří vědí méně, a ne tak dokonale
- *Učení* - pasivní přijímání informací
- *Struktura (tradiční) hodiny*: opakování a (vnější) motivace, nové učivo ,procvičování, vyhodnocení
- Orientace na fakta a výsledky
- Přispívá k rozvoji paměti

- Pasivita žáků – důraz na přejímání a předávání
- Učitel je garantem pravdy
- Převládající typ uspořádání výuky = frontální vyučování (pokud se objevuje skupinová práce, tak pouze jako zpestření hodiny)
- Kompetitivní struktura: překonej ostatní žáky, překonej své kolegy
- Neosobní vztahy mezi aktéry učebního procesu
- Škola rozříd'ovací instituce

KONSTRUKTIVISTICKÝ PŘÍSTUP (nové paradigma)

- *Výuka* = konstruování poznatků na základě porovnávání nových informací získaných z různých zdrojů s původními představami (prekoncepty) žáka
- *Učení* - aktivní zmocňování se informací
- *Struktura hodiny (EUR)*: evokace (aktivace dosavadních znalostí) uvědomění (nebo budování) významu procvičování a aplikace nových poznatků reflexe
- Orientace na porozumění učivu a jeho „uchopení“
- Přispívá k rozvoji myšlení a tvořivosti

- Aktivita žáků – dialog mezi tím, jak je svět chápán žákem a jak je mu zprostředkováván
- Učitel je garantem metody (režisérem výuky)
- Převládající typ uspořádání výuky = skupinové vyučování (význam interakcí mezi žáky navzájem) a individuální práce
- Kooperativní struktura: důvěra vrstevnickým vztahům v procesech učení
- Učební komunita (učební společenství)
- Cílem školy je rozvoj kompetencí a talentu všech žáků

DIDAKTICKÉ TRANSFORMACE MATEMATICKÝCH POJMŮ NA ZÁKLADNÍ ŠKOLE

Od roku 1976 bylo rozhodnuto postupně od 1. ročníku zavést na základních školách nové pojetí matematického vyučování, obvykle označované jako *množinové pojetí* (cílem výuky je naučit žáky užívat získané vědomosti a dovednosti při řešení úloh z praxe v nejrůznějších oborech lidské činnosti – matematické poznatky žáků byly budovány na základě množinových představ a jazyk školské matematiky byl založen na množinové terminologii např. množina, podmnožina, prázdná množina, sjednocení a průnik množin).

Základem elementárního kurzu aritmetiky se stala teorie přirozených čísel jako čísel kardinálních, opírající se o statické, často málo přehledné *množinové diagramy* jako prakticky jediné formy grafických znázornění.

Systematická výuka geometrie začínala ve 2. ročníku (nejprve pojmy úsečka, polopřímka, přímka, později rovinné a prostorové útvary prezentované jako množiny bodů pomocí charakteristické vlastnosti). Obtíže spojené s vysokou abstrakcí probíraných pojmů nebylo v takto pojatém vyučování možno překlenout.

Množinové pojetí matematického vyučování je spojeno s užíváním nového typu učebních materiálů – *pracovních sešitů*.

Autoři charakterizují nový soubor didaktických materiálů pro 1. stupeň ZŠ následující tezemi:

- Vyučování má vycházet z fyzických činností s předměty skutečnosti a jejich soubory tak, jak dítě získává počáteční představy a představy o prostoru spontánně už v předškolním věku a v praktickém životě i mimo školu
- Přirozený dětský projev se jen poznenáhlu převádí na přesnější jazyk elementárního matematického vyučování
- Jádrem vyučování je systém úloh z praktického života dítěte
- Využívá se různých, v pedagogické praxi osvědčených prostředků znázornění (počítadla, krychlové stavebnice...)
- Práce se cílevědomě orientuje na přípravu žáků na racionální využívání výpočetní techniky

B2b. Porovnávání čísel, poměr jednoduchý a postupný, rozšířit a krátit poměr, základní tvar poměru, úměra a její výpočet. Kartézská soustava souřadnic, znázornění bodu a přímky v rovině. Přímá a nepřímá úměrnost. Graf přímé a nepřímé úměrnosti, trojčlenka a její užití.

Porovnávání čísel

Na číselné ose je bod, který je obrazem menšího čísla, vlevo od bodu, který je obrazem čísla většího. Obraz většího čísla je vpravo od obrazu menšího čísla.

Máme tři druhy znamének, které nám symbolizují vztah mezi čísly. Menší, větší, rovná se.

- 1) Ze dvou čísel je větší to, které je víceciferné.
- 2) Při stejném počtu číslic porovnáváme postupně zleva v obou číslech udávající počet desetitisíců, tisíců, stovek, desítek a jednotek.

Jak porovnáváme zlomky? Převedeme na stejného jmenovatele, nebo křížové pravidlo.

Jak porovnáváme desetinné čísla? Porovnáváme jednotlivé cifry.

Poměr

Pojem poměr nás provází celým životem a setkáváme se s ním prakticky každodenně. Vzpomeň pár ukázek z běžného života – ředění sirupu, postřiků, čisticích prostředků, oleje apod., dále mapa

Poměr je tedy způsob porovnávání dvou údajů. Jak můžeme údaje porovnávat?

1. Pomocí **rozdílů** údajů na základě otázky „o kolik více“ nebo „o kolik méně“ ... $a - b$. Př. Ve třídě je 24 dívek a 12 chlapců. O kolik více je ve třídě dívek? O kolik méně je chlapců? Oba úkoly řešíme rozdílem $24 - 12$.
2. Pomocí **podílů** údajů na základě otázky „kolikrát více“ nebo „kolikrát méně“ ... $a : b$. Př. Ve třídě je 24 dívek a 12 chlapců. Kolikrát více je ve třídě dívek než chlapců? Kolikrát méně je ve třídě chlapců než dívek? Oba úkoly řešíme podílem: $24 : 12$.

Když zůstaneme u tohoto příkladu, můžeme si vysvětlit definici poměru. Řekneme, že ve třídě je dvakrát více dívek než chlapců. Tedy že počty dívek a chlapců jsou v poměru $24 : 12$. Čteme dvacet čtyři ku dvanácti.

Tedy: podílu $a : b$, kde $a > 0$, $b > 0$, říkáme poměr a čteme a ku b . Čísla a, b nazýváme členy poměru, kdy a – první člen poměru, b – druhý člen poměru.

Poměr (podíl) můžeme zapsat ve tvaru zlomku a ze znalosti zlomků z toho pro nás plyne, že poměry můžeme stejně tak jako zlomky krátit a rozšiřovat. Krácení poměru znamená dělení prvního i druhého členu poměru stejným číslem různým od nuly a jedné. Pokud je poměr po zkrácení vyjádřen nesoudělnými přirozenými čísly, říkáme, že je poměr v základním tvaru.

Abychom vyjádřili poměr v základním tvaru, tzn. pomocí nesoudělných přirozených čísel, potřebujeme často poměr rozšířit a to v případě, je-li poměr zadán například desetinnými čísly nebo zlomky. Rozšiřování poměru znamená násobení prvního i druhého členu stejným číslem různým od nuly a jedné.

Příklad: Zapiš poměr základním tvaru.

$$1,5 : 3,5 \rightarrow 15:35 \quad / :5$$

$$3:7$$

$\frac{4}{3} : \frac{6}{4}$ v obou členech poměru se potřebujeme zbavit zlomku, potřebujeme se zbavit jmenovatelů, tzn. Vynásobit oba členy poměru nejmenším společným jmenovatelem (v našem případě 12). Po rozšíření je sice poměr vyjádřen přirozenými čísly, ale zatím ještě ne nesoudělnými. Budeme jej tedy muset ještě krátit, v našem případě číslem 2.

$$\left(\frac{4}{3} * 12\right) : \left(\frac{6}{4} * 12\right) = 16:18 = 8:9$$

Dvě čísla (veličiny) můžeme porovnávat poměrem jen tehdy, jsou-li uvedeny ve stejných jednotkách.

Poměr 5 : 7 převrácený poměr 7 : 5

Je-li poměr menší než jedna, pak převrácený poměr je větší než jedna.

Příklad: Máme – li dva nebo více poměrů jednoduchých, můžeme z nich vždy vytvořit poměr postupný.

Jsou dány jednoduché poměry 2 : 7 a 3 : 8. Vytvořte z nich jeden poměr postupný.

Řešení:

Jednoduché poměry musíme nejprve upravit rozšířením nebo krácením tak, aby jeden z členů měly společný.

Tedy např. 2 : 7 / *4

$$8 : 28$$

Nyní máme v obou poměrech člen 8 a toho využijeme:

$$8:28$$

$$3:8$$

Závěr: Hledaný postupný poměr může být 3:8:28

Postupný poměr:

Tři a více čísel porovnáváme postupným poměrem. Například pro tři čísla a, b, c je postupný poměr

a : b : c , ten můžeme nahradit třemi jednoduchými poměry a : b , a : c , b : c

Máme-li převést dva jednoduché poměry na postupný

a : b , b : c na a : b : c musí být b v obou poměrech stejné číslo (stejný počet dílů).

Příklad

Iveta pracovala jako barmanka v podniku "Sk8 is Gr8". Jednoho večera přišel za ní na bar mírně podnapilý chlápek a chtěl si dát speciální míchaný nápoj. Řekl barmance instrukce:

"Holka, chci to do půl litru. Chci tam banánový džus, kofolu a kafe. To vše v poměru 5:2:3." Barmanka Iveta se podívala, ale náš zákazník náš pán. Dala se do výroby. Nejprve sečetla všechny poměry: $5 + 2 + 3 = 10$. Do půllitru se vleze 500 ml tekutiny. Musela tudíž zjistit, kolik mililitrů odpovídá jednomu dílku poměru. To zjistila jednoduše: $500/10 = 50$.

Jednomu dílku odpovídá 50 mililitrů. Takže do sklenice nalila $5 * 50 = 250$ ml banánového džusu, $2 * 50 = 100$ ml kofoly a $3 * 50 = 150$ ml kafe. Když se chlápek objevil podruhé, žádal klíčky od WC.

Z každého postupného poměru můžeme vytvořit jeden nebo více poměrů jednoduchých. Je dán postupný poměr $2 : 5 : 7$. Vytvořte z něj alespoň dva poměry jednoduché. Vybereme kterékoliv dva členy poměru - tedy např. $2 : 5$ a $2 : 7$

Úměra

Je zápis dvou sobě rovných poměrů. $a : b = c : d$

Členy a, d se nazývají vnější členy, členy b, c se nazývají vnitřní členy úměry.

Platí: součin vnějších členů úměry je roven součinu vnitřních členů úměry: $a \cdot d = b \cdot c$ (počátek nauky o úměrách byl položen v Babylóně, babylónské poznatky převzali a dále rozvedli Řekové. Pythagorejská matematická škola rozeznávala úměry aritmetické (vztahy tvaru $a - b = c - d$), úměry geometrické ($a : b = c : d$) a úměry harmonické.

Nauku o úměrách podává Euklides v páté knize "Základů". Ve středověku tvořila nauka o úměrách jednu z nejdůležitějších kapitol matematiky. Symboliku $a : b = c : d$ zavedl v r. 1693 Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716)).

Kartézská soustava souřadnic:

Kartézská soustava souřadnic je taková soustava souřadnic, u které jsou souřadné osy vzájemně kolmé a protínají se v jednom bodě - počátku soustavy souřadnic. Jednotka se obvykle volí na všech osách stejně velká. Jednotlivé souřadnice polohy tělesa je možno dostat jako kolmé průměty polohy k jednotlivým osám. Soustava je pojmenována podle francouzského filosofa Descarta, který se zasloužil (kromě jiného) o propojení algebry a eukleidovské geometrie.

V prostoru má kartézská soustava souřadnic 3 vzájemně kolmé osy (běžně označované x, y, z), v rovině 2 kolmé osy (x, y). Kartézský souřadný systém je standardní souřadný systém, kde je poloha bodu určena jeho vzdáleností od os X a Y .

Přímá úměrnost:

O dvou veličinách prohlásíme, že jsou **přímo úměrné**, jestliže bude platit, že když jednu veličinu zvětšíme (zmenšíme) x krát, tak druhou veličinu zvětšíme (zmenšíme) také x krát. Ve vztahu přímé úměrnosti jsou například veličiny:

- množství jablek a jejich celková cena (při stejné ceně za 1 kg);
- rychlosti a ujeté dráhy (při stejné době);
- času a ujeté dráhy (při stejné rychlosti);
- poloměru kružnice a délky kružnice;

Přímá úměrnost může být zadána v podobě: **rovnice, tabulkou, grafem**.

V 7. ročníku se přímá úměrnost zavádí jako závislost mezi hodnotami proměnných x a y , označíme-li v uvedeném příkladu počet jogurtů x a cenu y . Pak platí: kolikrát se zvětší (zmenší) hodnota x , tolikrát se zvětší (zmenší) hodnota y . Nepoužíváme vyjádření "čím - tím". Je-li závislost mezi hodnotami proměnných x a y je vyjádřena poměrem, můžeme říci, že v jakém poměru se změní hodnota proměnné x , v takovém poměru se změní hodnota proměnné y . Pracuje se zde pouze s hodnotami proměnné $x > 0$.

Grafem přímé úměrnosti je obecně přímka procházející počátkem soustavy souřadnic (pokud je definičním oborem množina reálných čísel). Avšak vzhledem k definičnímu oboru pracujeme v 7. ročníku pouze s podmnožinami přímky, tj. buď s polopřímkou nebo s úsečkou, pokud je však definičním oborem množina přirozených čísel, pak grafem závislosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce (event. na polopřímce). Přímá úměrnost jako zvláštní případ lineární funkce se probírá v 9. ročníku v tématu funkce.

Obecná rovnice přímé úměrnosti

$y = k \cdot x$, kde x a y jsou hodnoty příslušných přímo úměrných veličin, k je koeficient přímé úměrnosti.

Příklad: Kilogram třešní stojí 20 Kč. Vyjádřete závislost mezi cenou a hmotností:

- tabulkou
- rovnici;
- grafem;

Řešení:

- tabulkou

Množství v kg	1	2	3	4	5	6	7
Cena v Kč	20	40	60	80	100	120	140

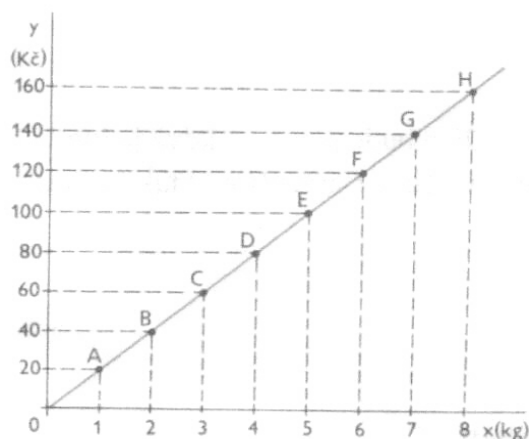
b) rovnicí

$$y = 20 \cdot x$$

kde y je cena třešní v korunách

x je množství třešní v kilogramech

c) grafem:



grafem je polopřímka s počátkem v $[0,0]$

Nepřímá úměrnost

O dvou veličinách prohlásíme, že jsou nepřímo úměrné, jestliže bude platit, že když jednu veličinu zvětšíme (zmenšíme) x krát, tak druhou veličinu zmenšíme (zvětšíme) také x krát. Ve vztahu nepřímé úměry jsou například veličiny:

- čas a rychlost vozidla potřebné k ujetí dané vzdálenosti;
- délka a šířka obdélníka při stejném obsahu;
- čas a počet stejně výkonných pracovníků k udělení konkrétní práce;

Nepřímá úměrnost může být zadána v podobě: **rovnice, tabulkou, grafem.**

Obecná rovnice nepřímé úměrnosti $y = \frac{k}{x}$, kde x a y jsou hodnoty příslušných přímo úměrných veličin, k je **koeficient nepřímé úměrnosti**.

Grafem nepřímé úměrnosti je rovnoosá hyperbola. Vzhledem k definičnímu oboru se v 7. Ročníku rýsuje pouze v 1. kvadrantu souřadné soustavy. Podobně jako u přímé úměrnosti, pokud je definičním oborem množina přirozených čísel, je grafem množina izolovaných bodů, které leží na hyperbole. Nepřímá úměrnost jako funkce se probírá v 9. Ročníku.

Příklad: Vzdálenost mezi dvěma body je 120 km. V jakém čase překonáme tuto vzdálenost dopravním prostředkem, který může měnit svoji průměrnou rychlost v rozmezí 10 km/hod – 120 km/hod? Tuto závislost vyjádřete:

- a) tabulkou
- b) rovnicí;
- c) grafem;

Řešení:

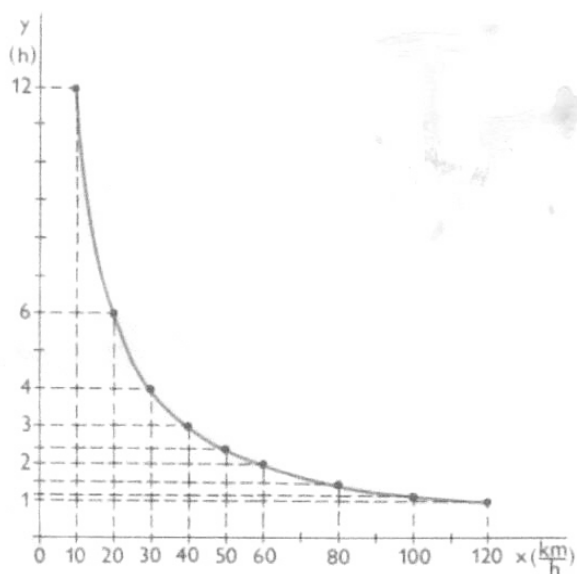
- a) tabulkou:

Rychlost	10	20	30	40	50	60	80	100
čas	120	60	40	30	24	20	15	12

- b) rovnicí:

$$t = \frac{120}{v}$$

- c) grafem:



Grafem je část hyperboly

Trojčlenka:

Jedná se o postup, který má obrovské praktické využití, proto ho musí každý bezpečně ovládat. Pokud řešíme příklad pomocí trojčlenky, vždy

- nejprve sestavíme zápis, a to tak, že stejné veličiny musí být pod sebou a neznámou doporučuji vždy ponechat ve druhém řádku. V dalším kroku
- rozhodneme, zda jsou veličiny ve vztahu přímé nebo nepřímé úměrnosti. Zobrazíme si pomocné šipky. Bez jakéhokoliv dlouhého uvažování tam, kde máme neznámou (ve druhém řádku), uděláme šip~ směrem nahoru.
- Jedná-li se o úměrnost přímou, pak na druhé straně bude šipka stejným směrem (tedy též nahoru) a jedná-li se o úměrnost nepřímou, bude na druhé straně šipka opačným směrem (tedy dolů).
- Na základě šipek sestavíme výpočet, po jehož vyřešení obdržíme výsledek.

Definice: Trojčlenka neboli trojčlenný počet, označuje postup při řešení úloh přímé a nepřímé úměrnosti, kdy známe tři údaje a vypočítáváme čtvrtý údaj.

Příklad: V obchodě stojí 10 kg jablek 120 Kč. Kolik stojí 7,5 kg jablek?

Řešení:

- dosavadní znalost přes jednotku (1 kg)

10 kg..... 120 Kč

1 kg..... $120 : 10 = 12$ Kč

7,5 kg..... $12 * 7,5 = 90$ Kč

- pomocí trojčlenky

10 kg 120 Kč

↑ 7,5 kg.....x Kč ↑ (přímá úměrnost – šipky mají souhlasnou orientaci)

x = 90 Kč

V obchodě stojí 7,5 kg jablek 90 Kč.

Složená trojčlenka

5 dělníků 5 dní 20 000 Kč

8 dělníků..... 8 dní..... x Kč

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{8}{5} * \frac{8}{5}$$

$$\frac{x}{20\,000} = \frac{64}{25}$$

$$25x = 64 * 2000$$

x= 51 200 Kč

B3a. Problematika motivace a kreativity v matematickém vyučování na jednotlivých stupních a typech škol. Zdroje, formy a nástroje motivace. Rozvíjení myšlení ve vyučování matematice.

Didaktická hra jako prostředek motivace

- didaktická hra bývá považována za jeden z nejúčinnějších motivačních zdrojů, za prostředek aktivizace žáků ve vyučování a formování pozitivního vztahu žáků k matematice
- má specifický didaktický význam zvláště v prvních letech školní docházky, v období postupného navykání na školní práci (může být v tomto období dominující činností)
- ani v pozdějších letech však neztrácí svůj pedagogický smysl
- zpočátku jsou hry založeny na aktivní manipulaci s předměty, doprovázené hlasitým počítáním (spojují se tak předmětné představy počtu a operace s vlastními pohybovými, hmatovými, sluchovými a citovými prožitky)
- různé druhy a typy her umožňují žákovi rozeznávat a formulovat problémy a úlohy, porovnávat věci a jevy, určovat rozdíly, učit se rozumět vztahům a závislostem, odhadovat a určovat výsledek a kontrolou výsledku se přesvědčovat o správnosti svého odhadu
- didaktické hry mohou být zařazeny do různých částí vyučovací hodiny matematiky, vyžadují však příslušnou přípravu učitele i žáků a vhodnou organizaci
- promyšlené a cílevědomé zakomponování didaktických her do vyučování může žáky nejen vhodně motivovat, ale také vytvářet prostor pro uplatnění kognitivního parametru hry, formulaci otázek, generování nových situací a úloh, často se značnou mírou divergence
- didaktické hry můžeme třídit podle různých kritérií na:
 - *poznávací a prověřující* (podle didaktického cíle)
 - *pohybové a tiché* (podle druhu reakce žáků)
 - *frontální, individuální, skupinové* (podle účasti žáků)
 - *„na rychlost“ a „na kvalitu“* (podle tempa)
 - *krátkodobé* (část jedné vyučovací hodiny), *dlouhodobé, průběžné*
 - *soutěživé* (velmi oblíbené)
- při smysluplném vyžívání didaktických her je třeba promyslet řadu otázek:
 - stanovit **didaktický cíl** hry – matematické poznatky, které se v průběhu hry budou uplatňovat nebo aplikovat, utvářet nebo upevňovat, resp. matematické schopnosti či vlastnosti osobnosti žáka, které hra rozvíjí
 - zajistit **potřebné materiály a pomůcky** (archy papíru, karty, kostky, magnetická tabule,...), vše připraveno s dostatečným předstihem a v potřebném počtu

- seznámit žáky s **pravidly hry** – přesně stanovená, objektivní a důsledně dodržovaná pravidla, za jejichž porušení se stanoví sankce (trestné body, úkoly navíc, vyřazení ze hry, apod.)
 - vymezit **optimální dobu provádění hry** – musí být přiměřená, aby hra nenarušila strukturu vyučovací hodiny a přispěla ke splnění jejího cíle
 - zvolit **vhodnou organizaci činnosti žáků**, rozhodnout zda bude hra probíhat formou soutěže – jednotlivců, skupin, řad, celé třídy nebo za vzájemné kooperace dvojic nebo členů skupiny
 - provést **závěr hry**, jehož součástí by mělo být vyhodnocení výsledků, vyhlášení a vhodné ocenění účastníků, případně vítězů soutěže
- při didaktických hrách se uplatní řada **učebních pomůcek** – pracovních listů, doplňkových didaktických materiálů (sbírek her a zábavných úloh nebo pracovních sešitů), ale také, podle konkrétních možností třídy a školy, prostředky výpočetní techniky, kalkulátory či počítačové programy

Matematické soutěže

- učitelé obvykle znají a využívají soutěží v odlišných významech s různými didaktickými cíli, záměry a přístupy:
- a) „uvnitř“ vyučovací hodiny:
- „pětiminutovky“, „početní rozcvičky“ – slouží k procvičení a fixaci základních počtářských dovedností, často jsou realizované **soutěživou formou jednorázové didaktické hry** v jedné vyučovací hodině
 - hry mohou mít také charakter **etapové soutěže**, sestávající z několika kol v několika hodinách (např. týdenní etapová soutěž – úkoly pro žáky jsou diferencovaně náročné)
 - takto koncipované soutěžení jednotlivců či skupin je organickou součástí vyučovacího procesu (může vést ke krátkodobému nebo střednědobému školnímu projektu), metodou řízení učební činnosti žáků a prostředkem učení žáků.
- b) „vně“ vyučovacího procesu:
- celostátní soutěže vyhlašované MŠMT, tzv. *soutěže kategorie A*, jsou **Matematická olympiáda, Pythagoriáda a Matematický klokan**
- soutěže bez přímé interakce mezi organizátorem a účastníkem – **Matematické korespondenční semináře**, které nesou v řadě regionů různé názvy (*Pikomat, Koumes, Kovboj aj.*)

Matematický klokan

- poprvé zorganizovala v roce 1991 skupina francouzských matematiků, symbolem byl australský klokan (protože počátky této soutěže jsou spojeny s Australanem Peterem O'Halloranem – jeho záměrem nebylo vytvořit novou soutěž pro nejtalentovanější matematiky, ale získávat pro matematiku „normální“ žáky, dokázat jim, že matematika nemusí být vždy nudný, nezábavný a obávaný předmět; chtěl dětem poskytnout radost ze soutěžení při řešení netradičních úloh, kterých není v učebnicích dostatek, a možnost porovnání vlastních schopností se stejně starými kamarády ve třídě, škole, okrese, regionu či v celostátním měřítku)
- v ČR byl poprvé Matematický klokan uspořádán v roce 1995 v pěti kategoriích (**Klokánek** – 4. a 5. tř. ZŠ, **Benjamin** – 6. a 7. tř. ZŠ, **Kadet** – 8. a 9. tř. ZŠ, **Junior** – 1. a 2. roč. SŠ, **Student** – 3. a 4. roč. SŠ)
- pořadatelem Klokana v ČR je **JČMF** ve spolupráci s **Katedrou matematiky PdF UP** a **Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci**
- ve všech školách ve druhé polovině března, ve stejný den a hodinu
- 24 úloh (8 krát za 3, 4 a 5 bodů), 60 minut

Projektové orientované vyučování

- Projektová metoda je vyučovací metoda, odvozená z pragmatické pedagogiky a principu instrumentalismu
- žáci jsou vedeni k řešení komplexních problémů, získávají zkušenosti praktickou činností a experimentováním, učí se samostatně rozhodovat a plánovat, organizovat a kooperovat svou činnost, formulovat a obhajovat vlastní řešení
- žáci ke splnění úkolu, kterým je vytvoření projektu, potřebují vyhledat mnoho nových informací, zpracovat a použít dosavadní poznatky z různých vyučovacích předmětů
- jejich práce není samoúčelná – výsledky projektů mají konkrétní a užitečnou podobu, jsou součástí reálného života

a) Příprava projektu

- výběr vhodných témat (s vysokou motivační hodnotou a možností integrace poznatků z různých oborů a vyučovacích předmětů, přiměřených věku a možnostem žáků)
- formulace úkolu (cíl, záměr projektu, by měl být konkrétní, reálný, pro žáka významný a přinášející užitečný výsledek)
- vhodná organizace žáků (např. spolupráce s ostatními vyučujícími, místo realizace, případné rozdělení do skupin, příprava technického a materiálního zabezpečení)
- časový předpoklad pro plnění úkolu (projekty krátkodobé a dlouhodobé)

b) Realizace projektu

- má obvykle charakter samostatné práce žáků při shromažďování získaných informací a jejich zpracování (výpočty, nákresy, modely, grafická znázornění,...)
- vhodná prezentace výsledků (např. formou nástěnky nebo výstavky)

c) Vyhodnocení výsledků

- obvykle se provádí ve vyučovací hodině matematiky se zdůrazněním použitých postupů a metod zpracování a ocenění přínosu pro třídu nebo školu
- významné je zhodnocení podílu jednotlivých žáků na realizaci projektu, jehož součástí je vhodné ocenění

Mezipředmětové souvislosti – předmětová integrace

- rozlišuje se:

a) vnější integrace

- obsah předmětů zůstává relativně samostatný, ale jejich témata jsou řazena vedle sebe s ohledem na vazby mezi nimi

b) vnitřní integrace

- spojování poznatků z kognitivně blízkých oborů v jednom samostatném učebním předmětu

- RVP pro základní vzdělávání předpokládá, že mnohdy izolované znalosti žáků budou začleňovány do větších učebních celků
- tradiční předmětové kurikulum je nahrazováno integrovaným kurikulem, založeným na integraci obsahu vzdělávacích předmětů do vzdělávacích oblastí (Člověk a společnost, Člověk a příroda, Člověk a zdraví,...)
- přístupy ke koncipování učiva v integrované výuce:

a) epizodický

- způsob je častý pro použití projektové metody, vybereme vhodné, ale ohraničené téma z běžného života („Na výletě“, „V nemocnici“,...)

b) regionální

- vychází z možnosti žáků při poznávání obvykle nejbližšího okolí zaměřené na obec, město, region jako východisko vzdálenějších skutečností („Naše vesnice“, „Naše město“,...)

c) podle biotopů

- učivo je koncipováno podle biotopů, které mohou žáci pozorovat v přírodě („V lese“, „U rybníka“,...)

d) podle časové chronologie

- jevy jsou seskupovány podle umístění v časové přímce („Život ve starém Egyptě“, „Středověk“,...)

- náměty předmětové integrace s matematikou:

FYZIKA	Měření teploty, třídění dopravních značek podle jejich tvaru, význam čísel při tísňovém
ZEMĚPIS	volání, orientace v čase podle hodin i kalendáře, finanční matematika, vyhledávání
BIOLOGIE	v jízdních řádech, evidence dat s využitím tabulek a grafů, poznatky z astronomie
HISTORIE	Časová posloupnost historických událostí a jejich vyjádření na časové přímce, římské číslice na historických budovách
PRACOVNÍ ČINNOSTI	Geometrické dovednosti při práci s papírem, textilem a jiným materiálem, využití zobrazovacích metod (nákresy ve volném rovnoběžném promítání), stavby krychlí, kótovaný půdorys

Historická poznámka

- předpokladem didaktického využití historických reminiscencí je alespoň základní orientace učitele v historii matematiky jako vědního oboru
- náměty využití historie matematiky:

a) seznámení žáků s jinými (nedekadickými) číselnými soustavami

- římské číslice, zápisy letopočtů a významných dat
- ukázky zápisů čísel starověkých národů (egyptské hieroglyfy, klínové písmo národů Mezopotámie,...)
- praktické užívání pozůstatků „číselných soustav“ našich předků (pár=2, tucet=12, mandel=15, kopa=60, veletucet=144)
- převádění jednotek času (základ 60, resp. 24)
- seznámení s dvojkovou číselnou soustavou

b) převádění jednotek délky, hmotnosti a objemu

- 1yard=91,44cm (Jindřich I. v roce 1101 – vzdálenost od jeho nosu ke konečku prstu upažené horní končetiny)

c) ukázky zajímavých počtářských praktik minulosti

- abakus

d) slavné matematické úlohy a objevy minulosti

- problém 4 barev
- Eulerova úloha o 7 mostech
- „jednotažky“, Möbiova páska

B3b. Procento (promile), základ, procentová část, počet procent, grafické znázornění.

Zavedení ve školské praxi. Způsoby výpočtu procentové části, počtu procent, základu. Využití v praxi.

Při výpočtu příkladů, které se týkají procent, se setkáváme s třemi základními pojmy:
základ (z), počet procent (p), procentová část (č).

Procenta obvykle označují nějakou relativní část z celku, přičemž celek jako takový se vyjádří jako 100 %. Jedno procento (1%) se rovná jedné setině celku (základu). $1\% = 0,001$ základu.

V úlohách s procenty se vyskytují tři číselné údaje:

- 1) Základ (z) – nebo celek, je vždy 100 %. Udává se obvykle v pojmenovaných číslech (např. 600 Kč, 45m,...)
- 2) Procentová část (č) – udává velikost části základu. Je vyjádřen obvykle v pojmenovaných číslech.
- 3) Počet procent (p) – vyjadřují, kolik procent základu je příslušná procentová část. Udává se v procentech.

Počet procent (p) → Základ (z) → Procentová část (č)
1 % ze 600 Kč je 6 Kč

Známe-li dva údaje, můžeme vypočítat třetí

Výpočet procentové části

1) Vzorec

$$c = \frac{z}{100} \cdot p$$

1% ze z = $z:100 = z/100 = 1/100 \times z = 0,01z$

Př. 32 % ze 70m.

2) Přes jedno procento

100 % 70m

1 % 0,7m

32% $32 \times 0,7 = 22,4m$

3) Zápis procent přes deset. číslo, kterým vynásobíme základ

$0,32 \times 70 = 22,4m$

4) Procento zapsané pomocí zlomku

$(32/100) \times 70 = 22,4m$

5) Trojčlenka

100% 70m

↑ 32% x ↑

Výpočet počtu procent

Je dán základ a procentová část. Vypočítáme 1 % (základ dělíme stem). Procentovou část dělíme tímto výsledkem. Opět můžeme přes jedno procento, trojčlenkou nebo pomocí vzorce:

$$p = \frac{\check{c}}{z} \cdot 100 = \check{c} \div \frac{z}{100}$$

Výpočet základu

Je dána procentová část a počet procent. Vypočítáme 1 % (procentovou část dělíme počtem procent). Výsledek násobíme 100. Vzorec:

$$z = \frac{\check{c}}{p} \cdot 100$$

Promile:

Název promile pochází z latinského *pro mille* = *na tisíc*. Používá se méně často než procento, ale pravidla jsou obdobná, jako u procent.

- Promile se označují symbolem ‰, což je symbol procenta (%) s další nulou k tomu na konci. Podle mnemotechnické pomůcky tři stylizované nuly v symbolu promile označují tři nuly v číslici 1000. Historicky však „nuly“ v označení procenta pocházejí z písmen zjednodušeně psaného termínu „pro cento“.
- Pro vyjádření zvláště malých dílů celku se používají promile.
- Promile znamená tisícinu daného celku.
- Jedno promile je desetina jednoho procenta.
- Jedno procento je deset promile.

Užití:

- *V promile se udává stoupání či klesání železničních tratí.*

Př. Stoupání 15 na trati dlouhé 800m. – Stoupání 15 znamená, že na každých 1000m vzdálenosti měřené na mapě, vzroste nadmořská výška o 15m.

- *Obsah některých látek v těle – alkohol*

Př. 0,8 alkoholu v krvi znamená, že v 1 litru je obsaženo 0,8 tisícín litru, to je 0,8 mililitrů alkoholu.

- 1 ‰ = 1/1000 = 0,1 ‰
- 10 ‰ = 10/1000 = 1/100 = 1%

Náměty na aplikační úlohy:

- ✓ Slevy zboží, zdražení zboží, kolísání cen zboží v čase;
- ✓ Slevy cen zájezdů cestovních kanceláří, storno poplatky;
- ✓ Splátkový prodej, leasing;
- ✓ Pojištění (havarijní včetně bonusů, pojištění domácnosti, penzijní připojištění se státním příspěvkem);
- ✓ Daně (z přidané hodnoty, z pozemků, nemovitostí, daň dědická, darovací, daň z příjmu);
- ✓ Finanční produkty spojené s jednoduchým úrokováním (termínované vklady, dluhopisy, jednorázově splatné úvěry).

Je rozdíl mezi zápisy „100 ‰“ (s mezerou) a „100%“ (bez mezery). Verze s mezerou znamená „Sto procent“, kdežto verze bez mezery znamená „stoprocentní“. Pozor tedy při psaní procent!

Vypočítané příklady – ukázka

1 Vypočítejte 4 % z 10000 Kč.

I. Řešení přes 1%.

Určíme 1%. $10000 : 100 = 100$

$4 \times 100 = 400$ Kč

4% z 10000 m je 400 Kč.

II. řešení přes vzorec $c = z \times p/100$

$c = 10000 \times 0,04 = 400$ Kč.

2 Ve třídě je 12 dívek což je 48 %. Kolik je celkem žáků?

I. Řešení přes 1 %.

Určíme 1 %. $12 : 48 = 0,25$

Základ určíme, když 1% vynásobíme 100. $0,25 \times 100 = 25$

Když 12 dívek je 48%, tak je ve třídě 25 žáků.

II. řešení přes vzorec $z = 100 \times c/p$

$z = 12 : 0,48 = 25$.

3 Ve 200 litrovém sudu je 64 l. Kolik je to %?

I. Řešení přes 1%.

Určíme 1%. $200 : 100 = 2$

Počet procent vypočítáme, když část vydělíme 1%. $64 : 2 = 32\%$

64 l je 32% z 200 l

II. řešení přes vzorec $p = 100 \times c/z$

$p = (64 : 200) \times 100 = 0,32 \times 100 \rightarrow 32\%$.

4 Nový MP3 přehrávač stál v obchodě 2 500. Protože ho nikdo za tu cenu nechtěl, zlevnili ho o 30 %. Následně zase šla MP3 na dračku, takže podnik přehrávač zdražil o 30 %. Kolik nyní přehrávač stojí?

V prvním případě stojí přehrávač 2 500. V tuto chvíli ho zlevníme o 30 %. 30 % z 2 500 je 750, přehrávač v tuto chvíli stojí 1 750 korun. Teď ho zdražíme o 30 %. V tento moment je nutné si uvědomit, že už nepracujeme se základem 2 500, ale s cenou 1 750, která nám určuje základ. Takže počítáme $1\,750 + 30\%$. 30 % z 1 750 je 525. Tuto sumu přičteme k základu a dostáváme 2 275. Tolik stojí přehrávač po zlevnění a následném zdražení, toto je správný výsledek.

Trojčlenkou:

	100%	2500 Kč	
↑	30%	x	↑
	x = 750 Kč		

Nová cena po slevě je 1750 Kč.

$$\begin{array}{ccc}
 & 100\% \dots\dots 1750 \text{ Kč} & \\
 \uparrow & 30\% \dots\dots x & \uparrow \\
 & x = 525 \text{ Kč} &
 \end{array}
 \quad \text{Nová cena po zdražení je 2275 Kč.}$$

Dejme tomu, že v ČR je přibližně 7 000 000 oprávněných voličů. Jak bychom určili, kolik jich skutečně volilo?

Je zřejmé, že 7 000 000 voličů můžeme prohlásit za základ. Voleb se zúčastnila pouze část voličů (říkáme jí procentová část a značíme $\check{c}$), které odpovídá 72% obyvatel (počet procent p).

Můžeme tedy zapsat:

$$\begin{array}{ll}
 z = 7\,000\,000 \text{ (obyv.)} & \dots\dots \text{ základ} \\
 p = 72\% & \dots\dots \text{ počet procent} \\
 \check{c} = ? \text{ (obyv.)} & \dots\dots \text{ procentová část}
 \end{array}$$

Všimněme si, že z a $\check{c}$ vyjadřujeme ve stejných jednotkách. Jak budeme postupovat?

Vycházejme z toho, co už umíme:

je - li $z = 7\,000\,000$ obyvatel,

pak $1\% \dots\dots 7\,000\,000 : 100 = 70\,000$ obyvatel,

72% určí, násobím-li $1\% \cdot 72$

72% $\dots\dots 70\,000 \cdot 72 = 5\,040\,000$ obyvatel.

Voleb se zúčastnilo 5 040 000 oprávněných voličů.

B4a. Komunikace v matematickém vyučování. Jazyk matematiky a jazyk školské matematiky. Terminologie a symbolika ve fylogenezi a ontogenezi.

Matematické pojmy

- Elementy didaktického systému matematiky jsou matematické pojmy. Obvykle jimi označujeme zobecněné představy o něčem vyjádřené jedním nebo více výrazy přirozeného nebo formálního (matematického) jazyka.
- Pojmy vznikají v procesu zobecňování a abstrakce, strukturalizovaně, ve složitých sémantických sítích, jako součást rozvoje celé psychiky člověka.
- Příklady pojmů osvojovaných ve školské matematice:
 - Číslo (přirozené, racionální, záporné, reálné,...)
 - Početní operace (sčítání, odčítání, násobení, dělení,...)
 - Relace (rovnost, nerovnost, rovnoběžnost, kolmost,...)
 - Funkce (přímá úměrnost, lineární funkce,...)
 - Geometrické útvary v rovině a v prostoru (čtverec, kružnice, krychle,...)

Proces vytváření pojmů (M. Hejný 1989) na vytváření geometrického pojmu kružnice

1) fáze motivace - navození vztahu k předkládanému problému, vycházející z didaktické modifikace reálné skutečnosti, z touhy dítěte po poznání, po řešení problému či situace (spojené s představou kulatých a kruhových tvarů a předmětů).

2) fáze představ – „předpojmu“, prekonceptu pojmu:

- konkrétních, předmětných, ze zážitků a smyslových vjemů se vyčleňují ty, které jsou asociované s budoucím pojmem (synkreze představ a zkušeností s oblémi předměty a diferenciací představy koule, kruhu a kružnice),
- intuitivně-abstraktních, využívajících školních zkušeností (model koule, kruhu, ..., kreslení, rýsování, vybarvování a vystřihování kruhů a kružnic).

3) fáze pojmu (poznatku) jako formy myšlení, která odráží **podstatné** vlastnosti a znaky předmětů a jevů – jednak znaky zjevné (smysly vnímatelné), jednak skryté, latentní.

- Je vyvrcholením poznávacího procesu v žákově mysli, kterým se *interiorizuje, zvnitřňuje* (Piaget) a spojuje s určitým slovem (termínem) nebo znakem (symbolem). Výsledek lze vyjádřit přesnou **definicí** pojmu kružnice,

4) "strukturální" etapa, v níž se pojem dále zpřesňuje, zobecňuje, krystalizuje a stává se prvkem určité struktury, axiomatizované teorie (školského modelu eukleidovské geometrie).

Pojmotvorný proces

V pojmotvorném procesu hraje významnou roli jazyk matematiky (systém znaků, jejichž prostřednictvím se uskutečňuje myšlení a komunikace). Jazyk matematiky jako jazyk vědního oboru se historicky vyvíjel.

S rozvojem matematiky se vyděloval například

- jazyk geometrie (přímka, trojúhelník,...),
- jazyk algebry (výraz, proměnná, rovnice,...),
- jazyk teorie množin (podmnožina, sjednocení,...) ap.

Obvykle rozlišujeme dvě stránky vývoje jazyka

- **symbolika** (dohodnuté znaky, symboly: číslice 0, 1, 2,..., symboly relací a operací = , < , > , + , - , ...) se s vývojem matematiky postupně zjednodušuje a strukturalizuje. Příkladem může být vývoj zapisování čísel (numerace): od komplikovaných, k vyjadřování početních postupů obtížně použitelných způsobů starověku, k jednoduchému principu poziční dekadické numerační soustavy, jejíž abecedu tvoří pouhých 10 znaků,
- **terminologie** (termíny českého jazyka - např. přímka, přirozené číslo, zlomek,..., nebo převzaté z řečtiny či latiny - např. aritmetika, geometrie, logika, adice, komutativnost ,...) se postupně diferencuje, precizuje a abstrahuje.

Zajímavosti z vývoje terminologie a symboliky

- Termíny doby národního obrození, pokoušející se vyjádřit matematické pojmy v tehdejší češtině: pich (bod), kútek (úhel), trojekut (trojúhelník), hubenky (číslíce), početmíra (aritmetika), měrozemna (geometrie),...
- Z kurzu aritmetiky jsou známy latinské termíny označující početní výkony, (adice = sčítání, subtrakce = odčítání, multiplikace = násobení, divise = dělení).
- Vývoj symboliky zapisování čísel:
 - o Řecko: čísla trojúhelníková, čtvercová,..., obdélníková (sudá) – lichá
 - o Římské číslice: I, V, X, L, C, D, M
 - o Digitální číslice

Jazyk školské matematiky

Jazyk matematického vyučování má 2 fáze:

- Pasívní užívání matematického jazyka – žák jazyku (učitele) porozumí,
- Aktivní užívání matematického jazyka – jazykem žák sám komunikuje.

- Formalismus, verbalismus: „naučená nevědomost“ – slovům či symbolům není přiřazena adekvátní představa

Příklady: formalismus jazyka teorie množin

Rozsah a obsah pojmu

- **Obsah pojmu** – soubor podstatných znaků, tj. abstrahovaných vlastností, bez kterých by byl daný pojem nemyslitelný
- **Rozsah pojmu** – množina všech objektů, které mají vlastnosti určené obsahem pojmu

Druhový pojem je pojem a, jestliže má všechny podstatné znaky pojmu b a ještě některé další. Pojem b je v tomto případě rodový pojem.

Příklady:

- čtverec je druhový pojem, pravoúhelník je k němu rodový pojem,
- pravoúhelník ke druhový pojem, rovnoběžník je k němu rodový pojem,...
- automobil je druhový pojem, dopravní prostředek je k němu rodový pojem,
- rohlík je druhový pojem, pečivo je k němu rodový pojem

Definice matematického pojmu

- Definice je způsob objasnění pojmu, ve kterém uvedeme ty podstatné znaky pojmu (tj. obsah pojmu), které dostatečně vymezují jeho rozsah.

Druhy definic:

- Klasická (aristotelská): „Čtverec je pravoúhelník, jehož všechny strany jsou shodné“.
- Nominální: „Kardinální čísla konečných neprázdných množin se nazývají přirozená čísla“.
- Konstruktivní: „Trojúhelník je množina všech bodů X prostoru, pro které platí $X \in AK \wedge K \in BC$ “.

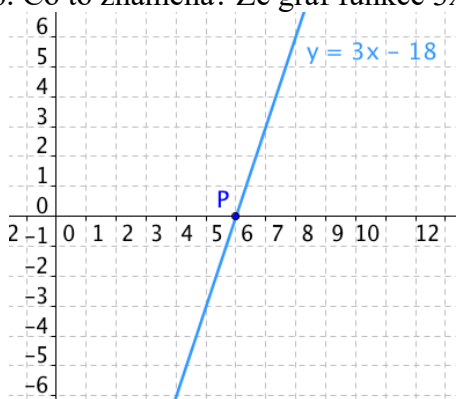
B4b. Rovnost a rovnice, způsoby řešení lineárních rovnic o jedné neznámé, postup při řešení a diskuse. Lineární rovnice o dvou neznámých, geometrická aplikace a jejich řešení. Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých a jejich užití při řešení slovních úloh, geometrické aplikace. Kvadratická rovnice a její druhy a způsoby řešení. Lineární nerovnice a jejich řešení.

ROVNICE

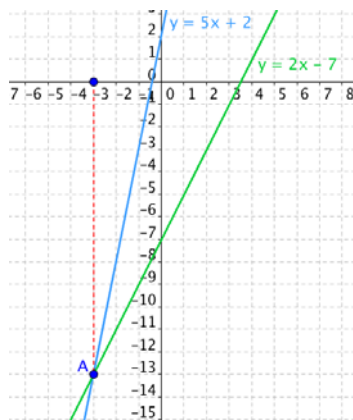
- rovnice se obvykle definují jako úloha, při které máme určit všechna čísla z daného číselného oboru M , pro něž jsou definovány dané funkce f , g proměnné x a nabývají týchž funkčních hodnot. Za množinu M se zpravidla volí obor R nebo K a také funkční hodnoty jsou z těchto oborů. Funkce f , g jsou tedy reálné funkce reálné proměnné nebo obecněji komplexní funkce komplexní proměnné. Píšeme: **$f(x) = g(x)$, kde $x \in M$.**
- Tento zápis nazýváme rovnicí s neznámou x ; $f(x)$ se nazývá **levá strana rovnice**, $g(x)$ **pravá strana rovnice**. Je-li $g(x) = 0$, říkáme, že rovnice je v **anulovaném tvaru**.
- Číselný obor M se nazývá **obor řešení rovnice**.
- Čísla $x \in M$, která vyhovují dané rovnici, se nazývají **kořeny** nebo **řešení rovnice**.
- **Rovnost:** $a = b$ představuje zápis, že čísla a , b jsou si rovna (např. $2+3=5$), **rovnice** $f(x) = g(x)$ představuje úlohu zjistit, kdy nastává naznačená rovnost hodnot funkcí. Vždy můžeme určit zda je výraz pravdivý nebo nepravdivý. Rovnost můžeme definovat: je relace neboli vztah, vyjadřující totožnost objektů, které jsou v tomto vztahu.
- K určení rovnice je třeba zadat:
 - a) obor řešení M
 - b) označení neznámé (kromě písmene x se užívá i jiných písmen, zpravidla z konce abecedy,...)
 - c) funkce f , g , jejichž proměnnou je neznámá a jejichž funkční hodnoty si mají být rovny.

Lineární rovnice

Lineární rovnice může mít mnoho různých tvarů. Abychom mohli lineární rovnice nějak hezky řešit, potřebujeme je upravit na základní tvar. Pokud upravíme lineární rovnici do základního tvaru, pak na levé straně získáme **lineární funkci**. Graf lineární funkce je přímka. Protože základní tvar lineární rovnice vypadá takto $ax+b=0$, tak řešení této rovnice jsou všechny body, ve kterých přímka (graf lineární funkce) protne osu x (což je zároveň graf funkce $f(x)=0$, tj. pravé strany). Například jsme zjistili, že řešením rovnice $3x-18=0$ je $x=6$. Co to znamená? Že graf funkce $3x-18$ protíná osu x v bodě $x=6$.



Druhý způsob je, že nebudeme rovnici upravovat vůbec, ale necháme si nakreslit grafy funkcí na obou stranách rovnice. Tj. vykreslíme si grafy funkcí $f(x) = 5x+2$ a $g(x) = 2x-7$.



Tyto dvě přímky se protly v jednom bodě, označený jako A. Jakou má tento bod A x-ovou souřadnici? Opět $x = -3$. Grafickým řešením rovnice $5x+2 = 2x-7$ je tak x-ová souřadnice průsečíku grafů funkcí na levé a pravé straně.

Způsob řešení rovnice o jedné neznámé:

- Ekvivalentní úpravy
- Averzní a inverzní operace

Přehled ekvivalentních úprav rovnice – nezmění platnost rovnice

- 1) Vzájemná výměna stran rovnice
- 2) Přičtení téhož čísla nebo výrazu obsahující neznámou, který je definovaný v celém O, k oběma stranám rovnice
- 3) Vynásobení obou stran rovnice opět stejným číslem či výrazem (nesmí být nulový)
- 4) Umocnění obou stran rovnice přirozeným mocnitelem, jsou li obě strany rovnice nezáporné (nebo naopak záporné) v celém oboru řešení rovnice O.

Zásady při řešení rovnice:

- Odstraníme závorky, zlomky, desetinná čísla
- Zjednodušíme levou a pravou stranu rovnice
- Členy s neznámou dáme na jednu stranu, absolutní členy na druhou stranu
- Celou rovnici vydělíme koeficientem u neznámé
- Provedeme zkoušku

Vyřešit rovnici znamená najít všechna čísla řešení neboli množinu všech jejích řešení.

Lineární rovnice o dvou neznámých

= Diofantovské rovnice, řešením je z oboru přirozených čísel N (viz.materiály od Slouky)

- $f(x,y) = g(x,y); x \in M, y \in M$

Př. Najděte dvě různá čísla taková, aby součet dvojnásobku prvního a trojnásobku druhého byl roven číslu 12.

- Označíme si neznámé x, y a můžeme napsat: $2x + 3y = 12$
- Není těžké odhadnout, že např. $x=0$ a $y=4$ této rovnici vyhovují. Řešením rovnice je tedy uspořádaná dvojice $(x,y) = (0,4) = \dots$
- Řešení je ovšem nekonečně mnoho a všechny vypsat nemůžeme..
- Přesto je možné jistým způsobem řešení vyjádřit. Hledám uspořádanou dvojici, můžeme postupovat např. tak, že libovolně zvolíme x a y dopočítáme: $y = 4 - 2x/3$. Všechny uspořádané dvojice mají tedy tvar $(x, 4 - 2x/3)$. Množina $K = \{(x, 4 - 2x/3); x \in \mathbb{R}\}$ Nebo zvolíme y a x dopočítáme: $K = \{(6-3y/2, y); y \in \mathbb{R}\}$
- Obrazem uspořádané dvojice je bod $[x,y]$. Řešili jsme v oboru $\mathbb{R}$, pokud v $\mathbb{Z}$, nebyla by řešení přímka p , ale pouze množina všech bodů této přímky.

Obecně:

- V případě, kdy alespoň jeden z koeficientů a, b v rovnici $ax + by = c$ je nulový, je obrazem řešení přímka.
 - o Pokud $a=0$, je přímka $//$ s x
 - o Pokud $b=0$, je přímka $//$ s y
 - o Pokud $c=0$, prochází přímka počátkem
 - o Jestliže $a=b=0$, potom záleží na čísle
 - $c=0$... řešením je každá uspořádaná dvojice
 - $c \neq 0$... rovnice nemá řešení

Rovnice o třech neznámých

- $f(x,y,z) = g(x,y,z); x \in M, y \in M, z \in M$

Rovnice o více neznámých, u nichž se za neznámé připouštějí pouze celá čísla, tj. řešení se hledá v oboru C , se nazývají diofantické (neurčité) rovnice. Zpravidla se neuvažují jednotlivé rovnice o dvou, resp. více neznámých, nýbrž několik takových rovnic, které mají být splněny zároveň; mluvíme pak o **soustavě rovnic** o dvou, resp. více neznámých (z oboru $M \subset R$). **Řešením** soustavy se rozumí společné řešení všech rovnic soustavy v daném číselném oboru M tj. průnik množin řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Způsob řešení soustavy rovnic: Metoda sčítací

Metoda dosazovací

Metoda kombinovaná

Grafické řešení soustav rovnic:

Soustavy rovnic o dvou neznámých $x \in R, y \in R$ lze rovněž řešit graficky. Jestliže sestrojíme množiny bodů, jejichž souřadnice jsou řešeními jednotlivých rovnic soustavy, pak souřadnice bodů společného průniku všech těchto množin představují řešení dané soustavy rovnic.

Zásady při řešení slovních úloh:

- Řádné přečtení a pochopení úlohy
- Rozbor úlohy a stanovení matematické metody
- Zápis úlohy
- Řešení úlohy – a) úsudek, b) rovnice
- Zkouška, ověření úlohy
- Odpověď

Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých

Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých můžeme obecně zapsat:

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

kde a, b, c, d, e, f jsou reálná čísla, x, y jsou proměnné. Vyřešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých znamená ve zvolené číselné množině nalézt všechny uspořádané dvojice, které jsou řešením obou rovnic. Množina všech řešení soustavy je průnikem množin všech řešení jednotlivých rovnic soustavy.

Soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých může mít:

- jedno řešení
- žádné řešení
- nekonečně mnoho řešení

Při řešení používáme tyto metody:

- **sčítací metoda** – rovnice soustavy násobíme čísly zvolenými tak, aby se po sečtení rovnic jedna neznámá vyloučila

- ***dosazovací metoda*** - vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice soustavy a dosadíme ji do druhé rovnice, čímž se jedna neznámá z této rovnice vyloučí
- další metody: ***grafická, porovnávací***

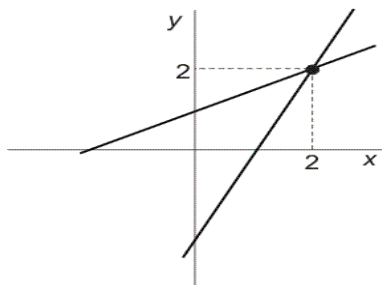
První dvě metody všichni známe a třetí jen lehce připomenou

Při vynášení do grafu nám obecně mohou vyjít tři možnosti:

Grafy (přímky) se protínají

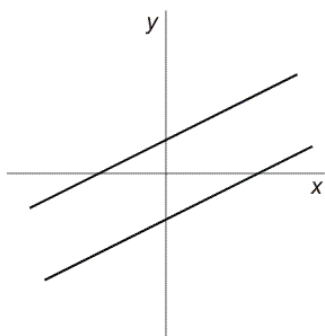
Průsečík znamená, že jsme našli hledanou dvojici neznámých.

Zde konkrétně $[x; y] = [2; 2]$.



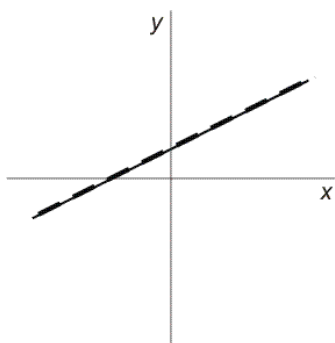
Grafy (přímky) se neprotínají - jsou rovnoběžné

V tomto případě můžeme konstatovat, že **soustava rovnic nemá řešení**.



Grafy (přímky) jsou totožné

V tomto případě má soustava lineárních rovnic **nekonečně mnoho řešení**.



Kvadratické rovnice

- Rovnice $f(x) = g(x)$ s neznámou $x \in K$ se nazývá **kvadratická rovnice** neboli rovnice 2. stupně s reálnými koeficienty, jestliže ji lze vyjádřit (ekvivalentními úpravami) v anulovaném tvaru **$ax^2 + bx + c = 0$** , kde $a \neq 0$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.
- Výraz ax^2 se nazývá kvadratický člen, a koeficient kvadratického členu, bx lineární člen, b koeficient lineárního členu, c absolutní člen.
- Pro $b=0$ má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + c = 0$; nazýváme ji **ryze kvadratickou rovnicí**.

- Pro $c=0$ má kvadratická rovnice tvar $ax^2 + bx = 0$; nazýváme ji **kvadratickou rovnicí bez absolutního členu**. Řeší se vytknutím neznámé na levé straně rovnice a užitím věty: Součin dvou čísel je roven nule právě tehdy, je-li alespoň jeden z činitelů roven 0
- O řešitelnosti libovolné kvadratické rovnice rozhoduje výraz $D=b^2-4ac$, zvaný **diskriminant**:
 - o je-li $D>0$ má kvadratická rovnice právě dva reálné různé kořeny,
 - o je-li $D<0$ nemá v oboru reálných čísel $\mathbb{R}$ žádný kořen, v oboru komplexních čísel $\mathbb{K}$ má právě dva komplexně sdružené kořeny,
 - o je-li $D=0$ má právě dva sobě rovné reálné kořeny (dvojnásobný reálný kořen).
- Pro $D\geq 0$ lze vyjádřit kořeny kvadratické rovnice vzorcem: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, pro $D<0$ lze vyjádřit vzorcem $x = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$.
- Má-li kvadratická rovnice kořeny x_1, x_2 , lze ji vyjádřit v ekvivalentních tvarech: $a(x - x_1)(x - x_2)$ neboli $(x - x_1)(x - x_2) = 0$

Lineární nerovnice

- Úkolem je určit všechna čísla x z daného číselného oboru $M \subset \mathbb{R}$, pro něž jsou definovány reálné funkce f, g reálné proměnné x a pro jejichž funkční hodnoty $f(x), g(x)$ platí $f(x)>g(x)$, resp. $f(x)<g(x)$, pro $x \in M$. Úlohy s tímto zápisem se nazývají **nerovnice s neznámou**.
- Číselný obor M nazýváme **oborem řešení nerovnice**.
- Čísla $x \in M$, která vyhovují dané nerovnici, tj. splňují podmínky úlohy, kterou nerovnice vyjadřuje, nazýváme **kořeny** nebo **řešením nerovnice**.

Řešení:

1. fáze: ekvivalentní úpravy.
2. fáze: určení nulového bodu.
3. fáze: určení intervalů, pro něž má nerovnice smysl.

Kvadratické nerovnice

Kvadratickou rovnici s neznámou x nazveme každou nerovnici, kterou je možné ekvivalentními úpravami převést na jeden z těchto tvarů:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &< 0 \\ ax^2 + bx + c &\leq 0, \end{aligned}$$

kde koeficienty $a, b, c \in \mathbb{R}$ a $a \neq 0$.

Tyto čtyři tvary kvadratických nerovnic pro potřeby této kapitoly nazveme **základními tvary kvadratické nerovnice**.

Řešení obecných kvadratických nerovnic je obtížnější než řešení kvadratických rovnic. Ukážeme si dvě metody. První z nich je pro začátečníky jednodušší na pochopení, ale je vcelku pracná, a bohužel se nedá použít pro všechny typy kvadratických nerovnic. Druhá metoda je oproti tomu složitější, ale pokud se ji naučíme, řešení kvadratických nerovnic touto metodou bude rychlé a krátké. Tuto druhou metodu lze použít pro jakoukoliv kvadratickou nerovnici.

Řešení pomocí rozkladu na součin

Tato metoda je velmi jednoduchá, ale potřebujeme pro ni znát řešení kvadratických rovnic, rozložení kvadratického trojčlenu na součin a také vědět, jak se řeší nerovnice v součinném tvaru.

Z kvadratické nerovnice v jednom ze základních tvarů vezmeme kvadratický trojčlen $ax^2 + bx + c$, který pomocí Vietových vzorců rozložíme na součin lineárních dvojčlenů $a(x - x_1)(x - x_2)$. To lze udělat pouze za podmínky, že diskriminant D příslušné kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ je nezáporný.

Pokud $D < 0$, pak tuto metodu nelze použít, pokud $O = \mathbb{R}$!

Tím jsme danou nerovnici ve tvaru např. $ax^2 + bx + c \geq 0$ převedli na nerovnici v součinném tvaru $a(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$, kterou už umíme řešit. Stačí určit nulové body jednotlivých lineárních dvojčlenů, sestavit tabulku a pomocí variace znamének dvojčlenů a koeficientu a určit, pro která x je daný součin kladný nebo nulový.

Řešení dosazením při záporném diskriminantu

Někdy se stane, že při řešení příslušné kvadratické rovnice k dané nerovnici vyjde diskriminant záporný. Podle dříve uvedeného to znamená, že kvadratický trojčlen v základním tvaru nerovnice nepůjde rozložit na součin. Nemůžeme proto použít metodu řešení kvadratické nerovnice jako nerovnice v součinném tvaru.

Pro řešení takové nerovnice v tomto případě existují jen dvě možnosti:

- nerovnice nemá žádné kořeny
- nerovnici řeší všechna čísla z definičního oboru D

Tu správnou poznáme pomocí jednoduchého dosazení. Zvolíme libovolné číslo z D , které do nerovnice dosadíme za x . Pokud nám po dosazení a upravení levé i pravé strany vyjde pravdivá nerovnost, pak nerovnici řeší každé číslo z D . Pokud dostaneme nerovnost nepravdivou, pak daná nerovnice nemá žádné řešení v daném O .

Řešené příklady

Příklad 1

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $-2x^2 - 4x + 6 < 0$.

Řešení: Nejprve určíme, že $O = D = \mathbb{R}$.

Abychom mohli kvadratický trojčlen rozložit na součin lineárních dvojčlenů, potřebujeme vypočítat kořeny příslušné kvadratické rovnice $-2x^2 - 4x + 6 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(-2)6}}{2(-2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{-4} = \frac{4 \pm 8}{-4} = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$$

Nerovnici $-2x^2 - 4x + 6 < 0$ pak můžeme přepsat jako $-2(x + 3)(x - 1) < 0$.

Nulové body lineárních dvojčlenů v závorkách už máme určeny, protože to jsou čísla x_1 a x_2 . Sestavíme proto tabulku a vyčteme z ní řešení této nerovnice.

	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; \infty)$
-2	–	–	–	–	–
$x + 3$	–	0	+	+	+
$x - 3$	–	–	–	0	+
$-2(x + 3)(x - 1)$	–	0	+	0	–

Hledáme intervaly, ve kterých je součin v nerovnici menší než nula. Vyhovují nám tedy intervaly, kde nám výsledný součin vyšel záporný, viz žlutě vyznačené sloupce.

Ještě zapíšeme $K = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Ve druhém příkladu si ukážeme použití této metody v případě, že příslušná kvadratická rovnice k zadané nerovnici má diskriminant nulový a vyjde jen jeden, dvojnásobný, kořen.

Příklad 2

Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$.

Řešení

Nejprve opět určíme, že $\mathbf{O} - \mathbf{D} - \mathbf{R}$.

Vypočteme kořeny příslušné kvadratické rovnice $9x^2 + 12x + 4 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 9 \cdot 4}}{18} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{18} = -\frac{2}{3}$$

Zadanou kvadratickou nerovnici $9x^2 + 12x + 4 \leq 0$ tedy můžeme přepsat jako $9(x + \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3}) \leq 0$.

Nyní opět můžeme použít tabulku s nulovými body ($x_{01} = x_{02} = -\frac{2}{3}$), nebo můžeme provést následující úvahu:

Díky stejným lineárním dvojčlenům v závorkách, můžeme nerovnici upravit na tvar $9(x + \frac{2}{3})^2 \leq 0$. Podíváme-li

se na nerovnici jako na podmínku pro vztah dvou výrazů, chceme, aby součin devítky a výrazu $(x + \frac{2}{3})^2$ byl záporný, nebo nulový.

Číslo devět je kladné, museli bychom ho vynásobit něčím záporným, nebo nulovým, abychom dostali záporný, nebo

nulový výsledek. Výraz $(x + \frac{2}{3})^2$ je ale díky druhé mocnině vždy nezáporný. Nikdy nebude záporný, ale pro

$x = -\frac{2}{3}$ bude nulový.

Tedy výraz na levé straně nerovnosti nebude nikdy záporný, ale pro $x = -\frac{2}{3}$ bude výraz nulový, což nám pro splnění požadované nerovnosti stačí.

$$K = \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$$

Množina všech kořenů K bude obsahovat pouze tuto jednu hodnotu, neboli

B5a. Pracovní metody a postupy ve vyučování matematice. Indukce, dedukce, analogie, experiment, heuristika, algoritmus. Didaktické zásady v matematickém vyučování. Názornost, abstrakce a generalizace.

Cíl:

Prostudování kapitoly vám umožní

- charakterizovat vybrané specifické metody a postupy používané ve vyučování matematice ze dvou pohledů:
 - při prezentaci/výkladu nového učiva (resp. při osvojování nového učiva žáky,
 - při řešení matematických učebních úloh
- vysvětlit podstatu algoritmických a heuristických metod
- popsat fáze řešení nestandardní (problémové) úlohy
- rozhodnout, který z postupů bude nejvhodnější pro vaše pedagogické působení.

Metody prezentace nového učiva:

- **Induktivní metoda** (indukce = vyvození) je založena na úsudku, směřujícím od zvláštních případů k obecnému tvrzení. Je charakteristická pro přírodní vědy. Pramenem poznání je pozorování, experiment, zkušenost (empirie) a její logické zpracování.
- Ve školské praxi jde prakticky vždy o tzv. neúplnou („školskou“) indukci. (Z aritmetiky přirozených čísel známe ještě tzv. úplnou matematickou indukci, která pomocí rekurentní podmíněnosti dává závěry platné zcela obecně i pro množiny nekonečné, např. pro množinu všech přirozených čísel – Peanův axiom)
- V matematickém vyučování by bylo totiž prakticky nemožné, zřejmě také zbytečné, experimentálně prozkoumat všechny možné případy.

Induktivní metoda:

Žáci zkoumají jednotlivá konkrétní fakta, jednotlivé dílčí (speciální) případy, provádějí pozorování (experimenty), získávají zkušenosti, provádějí zkoušky, ověřují, hledají zákonitosti, pokoušení se o formulaci obecných závěrů.

- Induktivní metoda je považována za hlavní (a nejvhodnější) pracovní postup ve vyučování matematice nejen primární školy. Prakticky všechny nové poznatky se ve škole prezentují (objevují) induktivní metodou a žáci sami se na jejich objevování zúčastňují – stávají se aktivními účastníky procesu tvoření.

INDUKTIVNÍ METODA



Deduktivní metoda:

- **Deduktivní metoda** (dedukce = odvození) je založena na úsudku, směřujícím od obecného tvrzení ke zvláštnímu případu. Je charakteristická pro vědeckou matematiku („matematika je věda deduktivní“).
- Pracuje s přesnými výchozími předpoklady a obecnými poučkami (axiomy, postuláty), z nichž logicky bezchybně vytváří celou disciplínu v dokonalé struktuře (příkladem je Eukleidův model geometrie).
- Možnost jejího využití v matematice primární školy je však omezená, neboť nepracuje s konkrétním názorem, vede často k formálnímu, receptivnímu „osvojení“ a následné reprodukci hotových faktů.
- Experimentální ověřování je nahrazeno obvykle autoritou učitelova sdělení nebo poučkou v učebnici.

Pro porovnání obou uvedených postupů uvedeme dva příklady:

1. S vlastností existence neutrálního prvku sčítání přirozených čísel (číslo 0) se žáci propedeuticky seznamují od 1. ročníku. Vlastnost lze **induktivně** vyvodit na základě experimentu z několika jednotlivých případů. O správnosti uvedených rovností se žáci sami přesvědčí. Tak například

$$3 + 0 = 0 + 3 = 3$$

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$

$$8 + 0 = 0 + 8 = 8, \text{ atd.}$$

Závěr: platí $a + 0 = 0 + a = a$ (pro každé přirozené číslo a).

Deduktivně by ovšem bylo možno odvodit z obecné platnosti vlastnosti

$a + 0 = 0 + a = a$ (pro každé přirozené číslo a) – např. uvedené jako „pravidlo, poučka v rámečku“ v učebnici platnost pro jednotlivé případy, proto:

$$3 + 0 = 0 + 3 = 3$$

$$5 + 0 = 0 + 5 = 5$$

$$8 + 0 = 0 + 8 = 8, \text{ atd.}$$

2. Poznatek o trojúhelníkové nerovnosti jako předpokladu sestrojitelnosti trojúhelníka ze zadaných tří stran lze **induktivně** vyvodit z jednoduchého experimentu. Z připraveného souboru tyčinek (špejlí) různé délky 2, 3, 4, 5, ..., 10 cm „sestavujeme trojúhelník“. V některých případech trojúhelník vytvoříme (pro $|AB| = 3$ cm, $|BC| = 4$ cm, $|AC| = 5$ cm), v některých případech (např. $|AB| = 2$ cm, $|BC| = 3$ cm, $|AC| = 6$ cm) trojúhelník sestrojil nelze. Induktivním postupem dospějeme k závěru, že: *trojúhelník lze sestrojit vždy, je-li $|AB| + |BC| > |AC|$, $|AB| - |BC| < |AC|$, pro každou trojici úseček v rovině.*

Deduktivní postup by spočíval v tom, že z výše uvedené matematické věty budeme usuzovat (odvozovat) na možnost sestrojení trojúhelníka pro jednotlivé případy velikostí (délek) úseček AB, BC, AC.

Metody řešení matematických učebních úloh

Analytická (analýza = rozbor, rozložení) a **syntetická** (syntéza = spojení, sloučení) **metoda** bývají často užívány ve vzájemné souvislosti, jejich kombinace se někdy označuje jako metoda analyticko-syntetická. Jejich podstatou jsou myšlenkové (kognitivní) operace žáka – analýza, syntéza – využívané při řešení rozmanitých typů matematických učebních úloh (slovních – textových, námětových úloh, geometrických konstrukčních úloh aj.).

Algoritmus

- Algoritmus je přesný předpis, kterému se lze naučit. Podle něho se v určitém pořadí vykonává soustava elementárních kroků (operací), vedoucích k vyřešení všech úloh určitého typu.
- Musí mít takovou podobu, aby bylo možno jeho příkazy každému předat, aby jich byl konečný počet a provádění příkázaných operací vytvářelo jednoznačně definovaný proces, kdykoliv zopakovatelný a vedoucí k řešení úlohy. Algoritmus je tedy postup determinovaný, hromadný a rezultativní.

- Můžeme ho vyjádřit slovy (slovní popis, komentář postupu numerického výpočtu), matematickou symbolikou (záznam postupu při řešení konstrukční geometrické úlohy) nebo vhodným grafickým schématem (například vývojovým diagramem).

Příklady algoritmu:

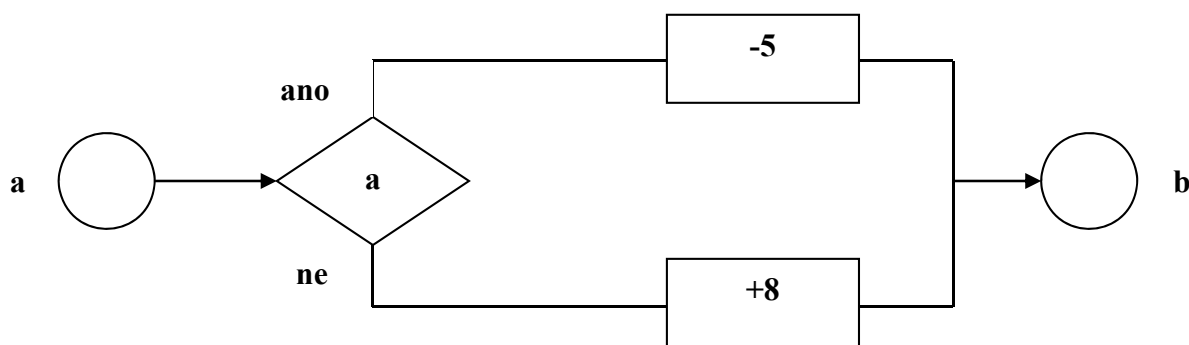
Algoritmus písemného sčítání lze slovy popsat posloupností kroků, které jsou tvořeny elementárními úkony:

$$\begin{array}{r} 27 \\ +16 \\ \hline 43 \end{array}$$

- oba sčítance (27 a 16) chápeme ve tvaru rozvinutého zápisu (sčítáme jednotky téhož řádu, začínáme jednotkami nejnižšího řádu) – proto je třeba důsledně dbát na zápis cifer téhož řádu „pod sebou“
- předpokládá se bezpečné zvládnutí základních spojů sčítání v oboru do 20 ($6+7=13$, $1+2=3$)
- při přechodu přes desítku přičteme jednu desítku ($13 \text{ jednotek} = 1 \text{ desítka}, 3 \text{ jednotky}$)

Vývojový diagram:

Vývojový diagram je grafické znázornění algoritmu, využívající dohodnutých grafických znaků. Začátek (start) a konec algoritmu označíme např. kroužkem, provedení každé jednotlivé operace se obvykle znázorní obdélníkem. Rozhodovací blok, který má obvykle jeden vstup a dva výstupy (jeden výstup vyjadřuje „ano“, druhý výstup „ne“), se označuje obvykle kosočtvercem.

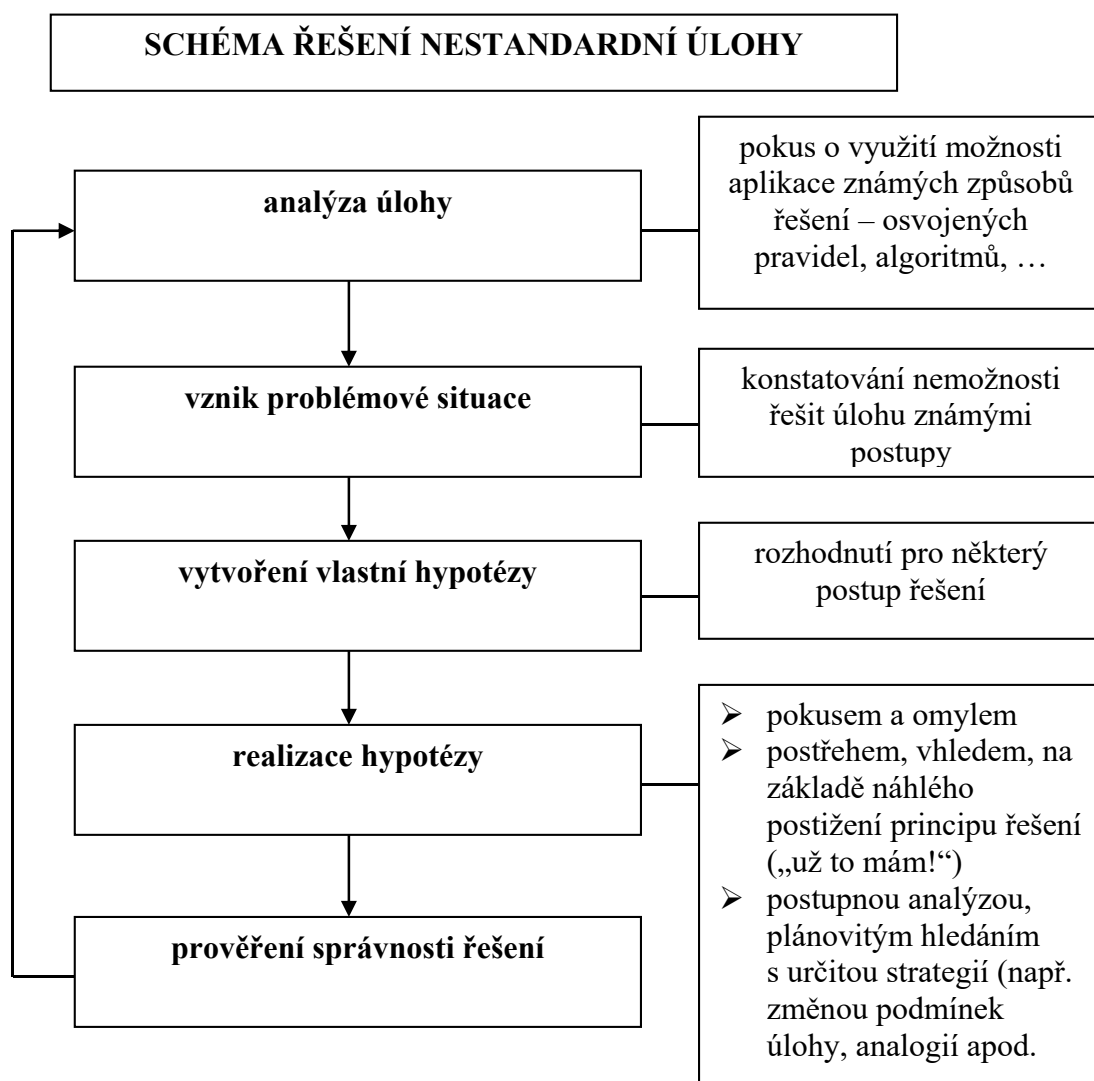


a	8	12	18	0	14	9	7	15	11
b									

Heuristika

- Heuristickou metodou (heuristiku) chápeme jako metodu tvůrčího řešení úloh a problémů, jejíž podstatou je objevování.

- Traduje se, že slavný řecký matematik Archimédes ze Syrakus po objevení tzv. Archimédova zákona vyběhl z lázně s výkřikem Heuréka! (Objevil jsem!).
- Ve vyučování matematice často užíváme heuristický dialog - vedení rozhovoru učitele se žáky, který pomáhá objevovat nové poznatky. Heuristický dialog je typickým projevem uplatnění dialogické přístupové strategie učitele.
- Heuristické postupy se uplatní při řešení úloh, označovaných jako nestandardní (problémové).
- Problémem se pro žáka stává úloha (situace), které dobře porozuměl, která ho svým obsahem či formulací zaujala natolik, že se o její řešení zajímá, ujasňuje si cíl a zkoumá cesty, jak tohoto cíle dosáhnout. Nemůže ji ovšem vyřešit pouze pomocí naučených stereotypů, běžné matematické rutiny (algoritmu), ale potřebuje k řešení určitou míru matematické tvořivosti (kreativity). Řešení problémových úloh spočívá v hledání a objevování nového, neznámého postupu řešení. Problémové situace (úlohy se zvýšenou náročností, někdy označované jako otevřené problémy) vyžadují určitou divergenci, otevřenost myšlení řešitele – poskytují značnou volnost ve vytváření vlastních hypotéz a ve volbě různých způsobů řešení.



Didaktické zásady ve vyučování

Názornost

- Zásada názornosti musí procházet všemi fázemi vyučovací hodiny – od úvodní části, přes opakování a zkoušení, probírání nového učiva, procvičování a zadání domácího úkolu.
- Nevyužívá se při zkoušení!
- Sem patří také opakování a upevňování si vědomostí. To je nezbytné nejen pro méně nadané žáky, ale i talentovaní žáci při opakování přicházejí na další souvislosti a vztahy v poznatcích.
- Pro zásadu názornosti je nezbytné, aby si žáci sami vytvářeli ve vyučovací hodině pojmy a představy na základě vjemů získaných a na základě předložených skutečností.
- Matematické pojmy je třeba v pojmotvorném procesu vyvodit z konkrétní představy, např. řádové počítadlo jako model rozvinutého zápisu čísla (model, obraz, ... - druhy modelů geometrii, pomůcky, ...).
- Nesmíme ale na druhé straně žáky zahltit velkým množstvím pomůcek a nových informací. Potom se může stát, že dojde k negativnímu účinku a můžeme snížit pozornost žáků.
- Musíme si uvědomit, že názornost není cílem, ale prostředkem vyučování.

Abstrakce

- Zaměříme pozornost na podstatnou stránku jevu a od ostatních stránek upustíme – abstrahujeme („odtáhneme“).

Proces abstrakce: 1. analýza jako pohyb od počitků a vjemů k pojům
 2. syntéza jako vznik nového vědění

Abstrakce:

1. identifikací (identifikujeme společnou slastnost souborů)
2. idealizací (zvolené vlastnosti oddělíme od reálného objektu – vytvoříme idealizovaný matematický objekt odlišného obsahu (přímka je nekonečně tenká), stupňovitost matematických abstrakcí (vylepšujeme abstrakce – nula, záporná čísla), pedagogicko-psychologická hlediska (věk žáků, mentální úroveň)).

Generalizace

- Zevšeobecnění.
- Metoda tvoření obecných pojmů z pojmů méně obecných nebo jedinečných.
- Opak determinace; zjednodušování.

B5b. Výraz, číselné výrazy, výrazy s proměnnou, mnohočleny a operace s nimi.
Základní algebraické vzorce $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$ a jejich grafické znázornění. Lomené
výrazy, smysl lomeného výrazu, rozšiřování a krácení lomených výrazů, operace
s lomenými výrazy.

Výrazy - každá proměnná, reálné číslo, absolutní hodnota a početní operace s nimi

Výrazy jsou matematické zápisy, které dělíme na:

1) Číselný výraz

„Číselný výraz lze zapisovat čísly, symboly, znaky početních úkonů a závorkami.“

Příkladem početního výrazu je $8 - 2[5 - (-7)] + 9$.

Výsledek početních úkonů daného výrazu nazýváme hodnotou číselného výrazu. Např.

$$8,5^3 - 7(45,6 + 97,1) + \sqrt{256,9} = 614,125 - 998,9 + 16,028 = -368,747.$$

2) Algebraický výraz

Algebraický výraz je zápis složený z čísel a písmen označující proměnné, jenž jsou spojeny znaky operací, případně závorkami.

Příkladem je $y - \sqrt{y} + 7$.

Dále jej rozdělujeme na:

- a) racionální algebraický výraz, který neobsahuje odmocniny, např. $z - 3 + y$,
- b) iracionální algebraický výraz, jehož součástí jsou odmocniny, např. $\sqrt{c} + \sqrt{d} - 1$.

<u>Výraz s proměnnými</u>	<u>Proměnné</u>
$\sqrt{c} + \sqrt{e^2} + 1$	c, e
$\frac{\sqrt{b} + 1}{b - 1}$	b
$x^5 - x^3 + 1$	x
$p - (q + 8)^3$	p, q

3) Lomený výraz

„Lomený výraz je zapsaný ve tvaru podílu dvou výrazů, přičemž jmenovatel musí být nenulový.“ (Coufalová a kol., 1999)

Příkladem je $\frac{x^2 - 25}{x + 5}$; $x \neq -5$.

Další dělení:

a) racionální lomený výraz, neobsahuje odmocniny proměnných, např. $\frac{(x-1)(x^2-1)}{x+1}$; $x \neq -1$,

b) iracionální lomený výraz, vyskytují se odmocniny proměnných, např. $\frac{\sqrt{b}+1}{b}$; $b \neq 0$.

Mnohočlen

1) Jednočlen

Jednočlen je výraz, který obsahuje jenom jedno číslo nebo proměnnou, dále jejich součin, podíl, mocninu a odmocninu.

Příkladem jsou $5, z, 6d, \frac{\sqrt{9}}{z}, \frac{r^2}{4s}, a^3, (-4x)^2, \sqrt{xyz}, \sqrt{5-7c}$.

2) Mnohočlen

Mnohočlen je součet nebo rozdíl několika jednočlenů.

Podle počtu členů ve výrazu rozlišujeme:

Dvojčlen... $x^5 - 1, 2y - 3$.

Trojčlen... $a^2 - 2ab + b^2, 25r^4 + 70r^2s + 49s^2$.

Čtyřčlen... $4y^3 + 8y^2 + 9y + 9, 65h^3 - 76i^2 + 32j - 98k$.

Výraz s proměnnými a a b $17 \cdot a \cdot a \cdot a - 3 \cdot b \cdot b + 5$ se dá ve zkráceném zápisu nahradit výrazem $17a^3 - 3b^2 + 5$, kterému říkáme trojčlen, neboť se skládá ze tří členů $17a^3, 3b^2, 5$. Koeficientem členu $17a^3$ je číslo 17 a členu $-3b^2$ je číslo -3.

Mnohočlen $-17a^3 + 3b^2 - 5$ je opačný mnohočlen k trojčlenu $17a^3 - 3b^2 + 5$. „Opačný mnohočlen k danému mnohočlenu získáme tak, že koeficient každého členu daného mnohočlenu nahradíme opačným číslem.“ (Herman a kol., 1999, st.12)

Sčítání a odčítání mnohočlenů

Sčítání mnohočlenů provádíme pomocí asociativního zákona, tak že sčítáme koeficienty jednotlivých členů se stejnými proměnnými ve stejné mocnině.

Odčítání mnohočlenů provádíme tak, že přičteme opačný mnohočlen a nadále sečteme příslušné členy.

1) Sčítání a odčítání jednočlenů

Sčítat a odčítat můžeme jednočleny, jenž mají stejnou proměnnou se stejnými exponenty, proto výraz $4a^3 + 8a^2$ nejde sečíst. Následně sečteme (odečteme) koeficienty a mocninu proměnné opíšeme.

$$\text{Např.: } 15h^3 + 24i - 7h^3 + 41i = (15h^3 - 7h^3) + (24i + 41i) = 8h^3 + 65i.$$

2) Sčítání mnohočlenů

Při sčítání mnohočlenů odstraníme závorky a příslušné jednočleny se stejnou proměnnou ve stejné mocnině sečteme.

$$\text{Např.: } (3a - 9b) + (15b - 5) = 3a - 9b + 15b - 5 = 3a + 6b - 5,$$

$$\begin{aligned} 5 + c^2d^2 - (6cd - 9) - (-8c^2d^2 - 9cd + 14) = \\ = 5 + c^2d^2 - 6cd + 9 + 8c^2d^2 + 9cd - 14 = 9c^2d^2 + 3cd - 9. \end{aligned}$$

3) Odčítání mnohočlenů

Odčítání mnohočlenů provádíme tak, že přičteme opačný mnohočlen. To znamená, že máme-li odečíst výraz $9cd - 14$, tak vlastně přičteme výraz $-9cd + 14$. Viz příklad.

$$\text{Např.: } (9y - 14z) - (6y - 5z) = (9y - 14z) + (-6y + 5z) = 9y - 14z - 6y + 5z = 3y - 9z.$$

Násobení mnohočlenů

1) Násobení jednočlenů

Při násobení jednočlenů vynásobíme koeficienty a mocniny se stejným základem. Násobit člen členem je snadné.

$$\text{Např.: } 4 \cdot 9h^2 = 36h^2,$$

$$(-p^3) \cdot (-7pq^2) = 7p^4q^2,$$

$$(2u^2v) \cdot (-9u^2v^3) = -18u^4v^4.$$

2) Násobení mnohočlenů jednočlenem

Pravidlo pro násobení mnohočlenů jednočlenem je následující - jednočlenem vynásobíme každý člen mnohočlenů a vzniklé součiny sečteme (odečteme).

$$\text{Např.: } 3(u + v - w) = 3u + 3v - 3w,$$

$$p(p - q^2 + 7) = p^2 - pq^2 + 7p.$$

3) Násobení mnohočlenů mnohočlenem

Obecně platí pravidlo, že každý člen prvního mnohočlenů vynásobíme každým členem mnohočlenů druhého a všechny vzniklé součiny sečteme.

Např.: $(k+l) \cdot (m+n) =$

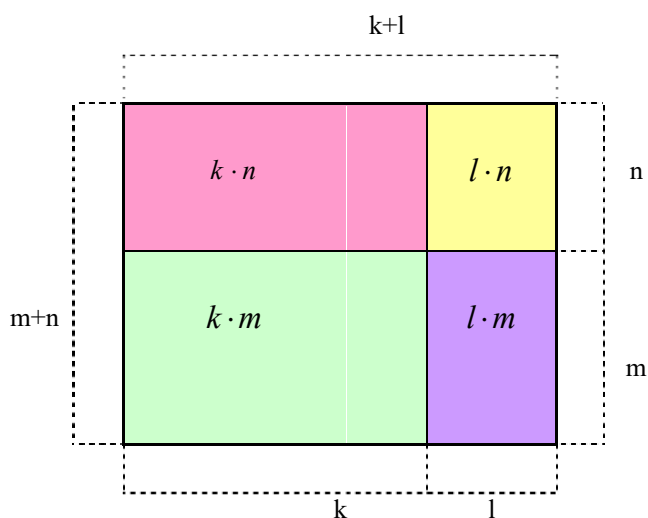
$\Rightarrow$ prvním členem prvního dvojčlenu násobíme každý člen druhého dvojčlenu

$$k \cdot (m+n) = km + kn,$$

$\Rightarrow$ druhým členem prvního dvojčlenu násobíme každý člen druhého mnohočlenu $l \cdot (m+n) = lm + ln,$

$$\Rightarrow (k+l) \cdot (m+n) = km + kn + lm + ln.$$

Viz následující náčrt.



Dělení mnohočlenů

1) Dělení jednočlenů

Při dělení jednočlenů postupujeme tak, že vydělíme koeficienty a mocniny se stejným základem. Za výsledky vždy uvádíme podmínky, při kterých má daný výraz smysl.

Např.: $27w^5 : 9 = \frac{27w^5}{9} = 3w^5,$

$$p^3q^2 : pq = \frac{p^3q^2}{pq} = p^2q; p \neq 0, q \neq 0.$$

2) Dělení mnohočlenu jednočlenem

Dělení mnohočlenu jednočlenem získáme tak, že jednočlenem, který je různý od nuly, vydělíme každý člen mnohočlenu. Následně zniklé podíly poté sečteme (odečteme),

Např.: $(18a^3 - 6a^2 + 24a) : (6a) = (18a^3 : 6a) - (6a^2 : 6a) + (24a : 6a) =$
 $= 3a^2 - a + 4; a \neq 0.$

Někdy k zápisu dělení používáme zlomkovou čáru např.:

$$(88u^3 + 77uv - 66u^2v^2) : 11u = \frac{88u^3 + 77uv - 66u^2v^2}{11u} = 8u^2 + 7v - 6uv^2; u \neq 0.$$

3) Dělení mnohočlenu dvojčlenem

Při dělení vždy sepisujeme členy mnohočlenů postupně:

$$(8r^3 - 19r + 27r^5 - 21r^4) \Rightarrow (27r^5 - 21r^4 + 8r^3 - 19r).$$

„Obecně platí pravidlo, že vydělíme 1. člen dělence 1. členem dělitele, získaným jednočlenem vynásobíme dělitel a tento výsledek odečteme od dělence, takto pokračujeme do té doby než dostaneme nulu, nebo kdy je stupeň dělence menší než stupeň dělitele.“ (Pešková, Mulačová, 1998)

Pro názorné pochopení uvádím příklad s postupem:

$$\begin{array}{r} (x^3 - 14x^2 + 6x - 60) : (x - 2) = \\ (x^3 - 14x^2 + 6x - 60) : (x - 2) = x^2 - 12x + 30 \\ \underline{-(x^3 - 2x^2)} \\ -12x^2 + 6x \\ \underline{-(-12x^2 - 24x)} \\ 30x - 60 \\ \underline{-(30x - 60)} \\ 0 \end{array}$$

4) Dělení mnohočlenu mnohočlenem se zbytkem

Postupujeme podobně jak u předchozího příkladu, seřadíme členy mnohočlenů sestupně a dělíme. Pokud stupeň dělence je menší než stupeň dělitele, tak dělení ukončujeme a říkáme, že dělíme se zbytkem.

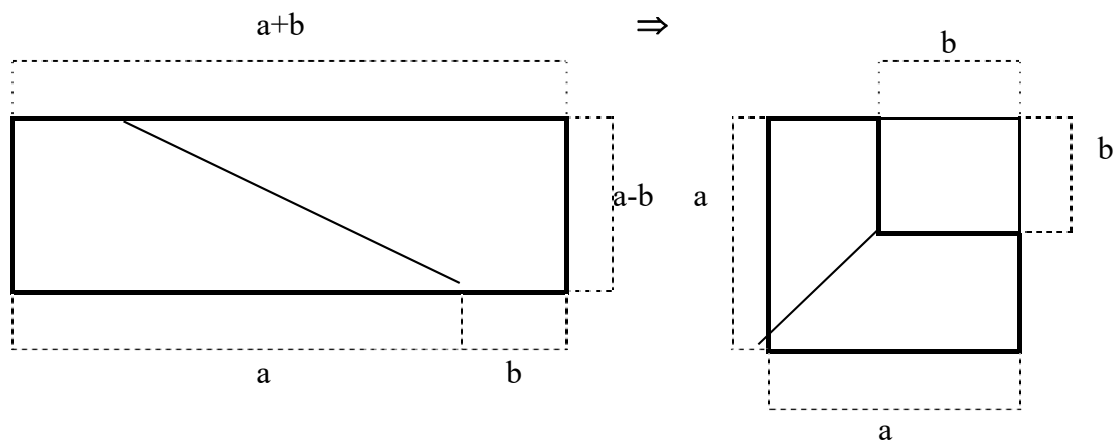
$$\begin{array}{r} \text{Např.: } (4x^3 + 8x^2 + 4x - 4) : (x + 5) = \\ (4x^3 + 8x^2 + 4x - 4) : (x + 5) = 4x^2 - 12x + 64 \text{ (zbytek } -324) \\ \underline{-(4x^3 + 20x^2)} \\ -12x^2 + 4x \\ \underline{-(-12x^2 - 60x)} \\ 64x - 4 \\ \underline{-(64x + 320)} \\ -324 \end{array}$$

Základní algebraické vzorce $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$ a jejich grafické znázornění.

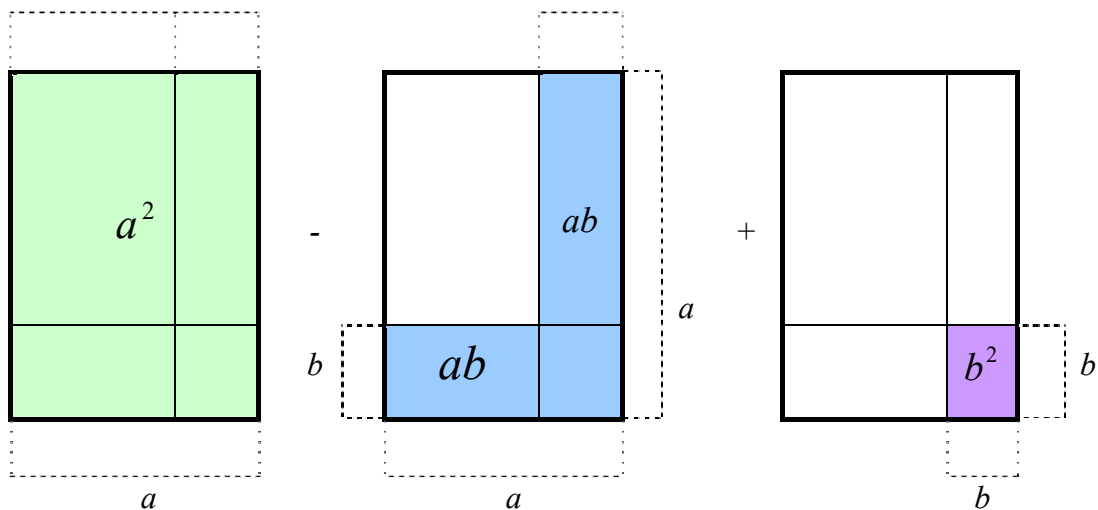
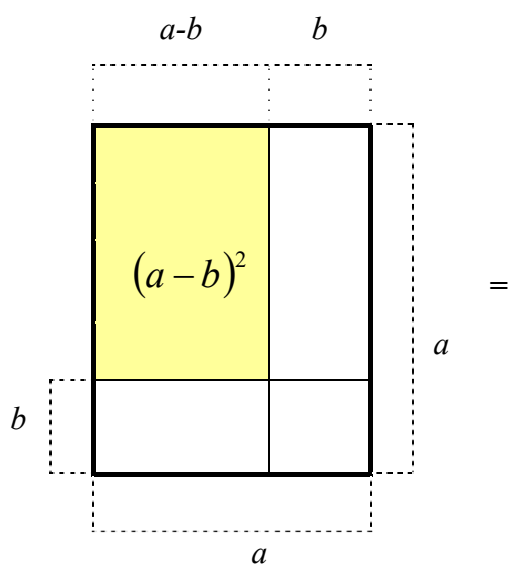
$$1) (a + b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2) \Rightarrow (x + 5)^2 = (x^2 + 10x + 25)$$

$$2) (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2 \Rightarrow (z + 9) \cdot (z - 9) = z^2 - 81$$

„Rozdíl druhých mocnin se rovná součinu součtu a rozdílu obou základů.“



$$3) (a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2) \Rightarrow (2y-7)^2 = (4y^2 - 28y + 49)$$



Rozklady mnohočlenů

Rozkladem mnohočlenu myslíme zápis ve tvaru součinu několika mnohočlenů nižších stupňů. Někdy je zapotřebí skloubit následující postupy.

Vytýkání společného největšího dělitele před závorku

Při vytýkání společného největšího dělitele postupujeme tak, že daným jednočlenem vydělíme postupně celý mnohočlen.

$$\text{Např.: } a^2b + ab - a^2b^3 = ab(a + 1 - ab^2).$$

1) Postupné vytýkání

Při postupném vytýkání vhodně spojíme členy mnohočlenu do skupin, ze kterých vytýkáme. Pokud najdeme v nových mnohočlenech společné mnohočleny, postup opakujeme.

$$\begin{aligned}\text{Např.: } z - xz - yz^2 + xz^2 &= z(y - x) + z^2(-y + x) = z(y - x) - z^2(y - x) = \\ &= (z - z^2)(y - x).\end{aligned}$$

2) Rozklad pomocí vzorců

Rozklad pomocí vzorců je vlastně o opačný proces umocňování pomocí vzorců.

$$\begin{aligned}\text{Např.: } 9c^2 - 42cd^2 + 49d^4 &= (3c - 7d^2)^2, \\ 81x^6 - 36y^2 &= (9x^3 - 6y)(9x^3 + 6y).\end{aligned}$$

Krácení lomených výrazů

Krácení lomených výrazů, provádíme tak, že čitatele i jmenovatele vydělíme stejným výrazem různým od nuly. Uvedeme podmínky, při kterých má výraz smysl.

$$\text{Např.: } \frac{pq^2}{p^2q} = \frac{q}{p}, \quad pq^2 \neq 0 \Rightarrow p \neq 0, q \neq 0.$$

Rozšiřování lomených výrazů

Lomený výraz rozšíříme tak, že čitatele i jmenovatele násobíme stejným výrazem různým od nuly. Dále určíme podmínky, za kterých má výraz smysl.

Sčítání a odčítání lomených výrazů

1) Se stejnými jmenovateli

Při sčítání a odčítání lomených výrazů se stejným jmenovatelem sečteme (odečteme) čitatele a jmenovatele opíšeme, pokud je to možné, výraz krátíme. Je nutné uvést podmínky, za nichž má daný výraz smysl.

$$\text{Např.: } \frac{2y+1}{y+4} + \frac{y+6}{y+4} = \frac{2y+1+y+6}{y+4} = \frac{3y+7}{y+4}; \quad y \neq -4.$$

2) S různými jmenovateli

Sčítat a odčítat lomené výrazy s různými jmenovateli znamená převést výrazy na společného jmenovatele. Poté sečteme případně odečteme čitatele a opíšeme společného jmenovatele. Také je zapotřebí určit podmínky, při kterých má výraz smysl.

$$\text{Např.: } \frac{5z}{z-1} - \frac{7z}{2z-2} - \frac{3z}{5z-5} = \frac{10 \cdot 5z - 5 \cdot 7z - 2 \cdot 3z}{10(z-1)} = \frac{50z - 35z - 6z}{10(z-1)} = \frac{9z}{10(z-1)};$$

$$z \neq 1.$$

Násobení lomených výrazů

Násobení lomených výrazů určíme tak, že součin čitateľů lomíme součinem jmenovatelů. Nejprve krátíme výrazy a poté násobíme. Uvedeme podmínky, při kterých mají výrazy smysl.

$$\text{Např.: } \frac{p^2 - pq}{2p} \cdot \frac{q}{4p^2 - 4q^2} = \frac{p(p-q)}{2p} \cdot \frac{q}{4(p-q)(p+q)} = \frac{p-q}{2} \cdot \frac{q}{4(p-q)(p+q)} =$$

$$= \frac{q(p-q)}{8(p-q)(p+q)} = \frac{q}{8(p+q)}; \quad p \neq 0, p \neq q, p \neq -q.$$

Dělení lomených výrazů

Dělit jeden lomený výraz druhým znamená vynásobit první výraz převráceným výrazem k druhému výrazu. Je důležité uvést podmínky, za kterých mají výrazy smysl.

$$\text{Např.: } \frac{r^2 + 8r + 16}{s+3} : \frac{r^2 - 16}{(s+3)^2} = \frac{(r+4)(r+4)}{s+3} \cdot \frac{(s+3)^2}{(r+4)(r-4)} = \frac{(r+4)(s+3)}{r-4} =$$

$$= \frac{rs + 3r + 4s + 12}{r-4}; \quad s \neq -3, r \neq 4, r \neq -4.$$

Úprava složených lomených výrazů

„Lomený výraz, který má v čitateli nebo jmenovateli opět lomený výraz, se nazývá složený lomený výraz.“ (Coufalová a kol., 2000)

Úprava složených lomených výrazů se uskuteční tak, že lomený výraz v čitateli vydělíme lomeným výrazem ve jmenovateli. Nesmíme zapomenout na určení podmínek, za kterých mají výrazy smysl.

$$\text{Např.: } \frac{\frac{4u^2}{8v^3}}{\frac{16u}{32v^2}} = \frac{4u^2}{8v^3} : \frac{16u}{32v^2} = \frac{4u^2}{8v^3} \cdot \frac{32v^2}{16u} = \frac{u}{2v} \cdot \frac{4}{4} = \frac{u}{2v}; \quad u \neq 0, v \neq 0.$$

B6a. Matematické učební úlohy, jejich místo v matematickém vzdělávání na různém stupni a typu školy. Didaktické funkce, typologie, metody řešení. Práce s matematickými učebními úlohami ve výuce jako reflexe odborných a didaktických kompetencí učitele.

Učební úloha je každá situace, podněcující řešitele (žáka) k uvědomělé činnosti, která směřuje k dosažení stanoveného učebního cíle. Můžeme tedy úlohu považovat z výzvu k činnosti. Matematická úloha je výzvou k matematické činnosti.

Činnost je zaměřena na všechny aspekty učení:

- **obsahový**, znamenající objevení nových matematických poznatků, zopakování matematického učiva nebo prověření jeho zvládnutí - např. násobení čtyřmi, pojem zlomku aj.,
- **operační**, vyjadřující, které učební a poznávací činnosti a operace žák při řešení úlohy užije - např. reprodukce známých faktů, „úsudek“, myšlenková analýza a syntéza aj.
- **stimulační (motivační)**, tvořený zájmy, sklony a potřebami žáka. Motivační silou úlohy se rozumí způsoblost navodit právě ty aktivity, které jsou k úspěšnému řešení potřeba,
- **formativní**, tzn., že umožňuje nejen dosažení výsledku, ale vede i k osvojení činnosti, která k němu směřuje - např. algoritmus písemného dělení jednociferným dělitelem,
- **regulativní** (úloha je prostředkem, jímž lze žakovu činnost organizovat a řídit).

Matematickou úlohou je například lineární algebraická rovnice o jedné neznámé, numerický příklad na písemné sčítání dvouciferných čísel, složená slovní úloha, sestavení trojúhelníku, jsou-li dány jeho dvě strany a úhel jimi sevřený, problémová úloha, vyžadující objevení strategie řešení aj.

Struktura matematické učební úlohy

- **předmětná komponenta** (množina objektů, o nichž je v úloze řeč, a vztahy mezi těmito objekty),
- **požadavek na řešení úlohy** (vyjádřený jako pokyn k řešení úlohy či otázku úlohy),
- **operátor** (souhrn operací, které je nutno uskutečnit v souladu s podmínkami úlohy, aby byl splněn požadavek úlohy).

Didaktické funkce úlohy

1) motivovat pomocí matematické úlohy znamená vyvolat zájem žáků o následující výklad nebo cvičení, aktivizovat žáky, zdůvodnit užitečnost nově probíraného poznatku, zajistit pozornost žáků a vytvořit žádoucí tvůrčí pracovní klima. Motivační hodnota úlohy je významná pro její přijetí žákem (a tedy i pro její úspěšné řešení) a závisí nejen na obsahu a tématu úlohy, ale také na subjektivních faktorech, jako jsou schopnosti a vlastnosti osobnosti řešitele.  motivační funkce

Motivační funkce úlohy

- Pokuste se posoudit a následně porovnat motivační potenci následujících dvou učebních úloh:
- (1) *Po mistrovství světa v hokeji bylo zveřejněno, že náš reprezentační brankář měl 92 procent úspěšných zásahů. Jak této zprávě rozumíte?*
- (2) *Porovnejte podílem čísla 92 a 100.*

2) matematická úloha může být využita při **výkladu nového učiva** – při objasňování nového pojmu nebo vytváření nové matematické dovednosti. Umožňuje názorně objasnit podstatu vytvářeného pojmu a zařadit jej do didaktického systému učiva. Matematický obsah a námět úlohy při výkladu nového učiva je třeba volit přiměřené, reálné, odpovídající skutečnosti a zkušenostem žáků, srozumitelné a jednoznačně formulované.  didaktická funkce

Úloha při prezentaci nového učiva:

Průměrná rychlost

- *Řidič ujel za 3 hodiny 210 km. Jakou jel průměrnou rychlostí?*
- Podílem $210:3 = 70$ vypočítáme, kolik kilometrů by ujel každou hodinu, kdyby jel celou vzdálenost 210 km stále stejně rychle.

Toto číslo nazveme *průměrnou rychlostí*.

3) řešení matematických úloh je jedním z důležitých způsobů **aplikace** získaných poznatků a jejich procvičování a upevňování. Uvedená funkce matematických úloh poskytuje žákům příležitost využít osvojené vědomosti a dovednosti při řešení praktických, reálných problémů. Úlohy k procvičování tvoří obvykle **didakticky promyšlenou řadu**, poskytující možnost diferencovat počtem i obtížností řešených úloh.  aplikační funkce

Úloha jako nástroj diagnostiky schopností a znalostí žáka:

4) matematické úlohy mají funkci **diagnostickou**. Jsou nezastupitelným prostředkem kontroly dosažené úrovně vědomostí, dovedností a vlastností osobnosti žáka, **nástrojem pro zjišťování výsledků učení** obvykle formou písemných zkoušek.

Typologie matematických učebních úloh (podle různých kritérií)

1) všímáme-li si toho, **které matematické jevy, poznatky, vědomosti, dovednosti jsou obsahem úlohy**, jsou potřebné k řešení, můžeme rozlišovat např. úlohy

- aritmetické, geometrické, algebraické, ...
- aritmetické úlohy na sčítání, odčítání, násobení, ...
- aritmetické úlohy na sčítání v oboru numerace do 100, do 1000, ...

- aritmetické úlohy na sčítání v oboru do 100 bez přechodu přes desítku, s přechodem přes desítku, ...,

2) kritériem pro třídění úloh může být **míra tvořivosti řešitele** při řešení. Můžeme rozlišit úlohy

- **standardní** - které k řešení využívají známého vzorce, pravidla nebo postupu (návodu, „receptu“, algoritmu),
- **nestandardní (problémové)**, k jejichž vyřešení známé postupy a algoritmy nestačí. Žák musí řešit (matematický) problém, hledat a objevovat metodu řešení (**heuristika**), protože jeho dosavadní zkušenost řešení úlohy neumožňuje. Postup řešení úlohy není znám, řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem. Problémové úlohy vyžadují hluboké soustředění, invenci a čas.

Stupeň heurističnosti je typický příkladem, kdy je nutno brát v úvahu nejen úlohu samu, ale i kompetence jejího řešitele. Pro některé žáky je úloha heuristická, pro některé je její řešení pouze rutinní záležitostí.

Podle toho, jaký charakter objektů, o nichž se v úloze jedná (předmětná komponenta), můžeme rozlišit:

- úlohy, v nichž vystupují matematické výrazy (čísla, konstanty, proměnné, aritmetický a algebraický výraz, ...), vyjádřené adekvátní matematickou symbolikou, nazveme úlohy „čistě matematické“,
- úlohy, jejichž předmětnou komponentu tvoří reálné objekty z nematematické oblasti, popisující reálnou situaci přirozeným jazykem, se označují jako slovní úlohy (praktické, textové, ...). Slovy jsou v nich vyjádřeny vztahy mezi podmínkami úlohy a otázkou, mezi údaji danými a hledanými.

Základem řešení úloh je úplné a správné porozumění textu úlohy – čtenářská gramotnost. To znamená rozpoznat a pochopit matematické problémy, řešit je a využívat matematické znalosti.

Řešení každé matematické úlohy má tyto části:

- řádné přečtení, pochopení úlohy,
- rozbor a určení vztahu mezi podmínkami úlohy,
- nalezení matematické metody, kterou budeme úlohu řešit,
- řešení úlohy pomocí matematického aparátu a jeho zápis pomocí matematické symboliky,
- zkouška (ověření) správnosti řešení,
- diskuze nad řešením úlohy popř. zobecnění závěrů.

Velmi vhodně a přehledně rozděluje matematické úlohy Prof. RNDr. František Kuřina, CSc.

Dělí je na:

- kalkulativní – sestavené úlohy,
- rozhodovací – zjistit, zda platí nebo neplatí zadání úkolu,
- určovací – podle pokynů provést úkol,
- konstrukční – narýsovat obrazce podle dispozic,

- důkazové – dokázat pravdivost nějakého tvrzení.

Dále podle úkolu, které mají úlohy ve vzdělávacím procesu, je dělí na:

- motivační,
- instruktivní,
- procvičovací,
- diagnostické,
- kontrolní.

Podle náročnosti řešení úlohy dělí na:

- cvičení – žáci používají znalost jednoho postupu,
- úlohy jako takové – žáci používají kombinaci několika algoritmů,
- problémy – žáci se musí soustředit, musí mít hlubší znalosti, dovedou zobecňovat a na řešení mají dostatek času.

Významný představitel tzv. realistického vyučování matematice **Hans Freudenthal** (Mathematics as an Educational Task, 1973) rozlišuje úlohy

- “realistické“,
- „pararealistické“ a
- čistě matematické (numerické příklady).

Příklad realistické úlohy

- *Konstrukční bod K určuje velikost můstku. Rozlišují se tři druhy můstků: střední (K 90 m), velký (K 120 m), mamutí (K 180). Délka nájezdu na středním můstku bývá kolem 80 m, na velkém můstku asi 90 m, na mamutím můstku asi 100 m.*
- *Když závodník dosáhne konstrukčního bodu můstku, získá 60 bodů. Skočí-li méně, odečítá se mu za každý metr podle druhu můstku určitý počet bodů. Skočí-li více, přičítá se stejný počet bodů. Na velkém můstku se odčítá nebo přičítá 1,8 bodu za každý metr, 0,9 bodu za každého půl metru. Vypočítej, kolik bodů získali závodníci na velkém můstku za délku skoku:*

Délka skoku (m)	121	119	121,5	119,5	123	142,5	131
Počet bodů	61,8	58,2	62,7				

“Pararealistické” (slovní - kontextové úlohy):

(1) *Paní Dvořáková zaplatila za dvě a půl kila hovězího masa 375 Kč, paní Navrátilová za 1,5 kila vepřového 195 Kč. Které maso bylo dražší? O kolik?*

- (2) *Zahrada paní Hruškové má délku o 2 metry větší než šířku. Obvod zahrady je 160 metrů. Jaké rozměry má zahrada? Jaká je výměra zahrady?*
- (3) *V kosmetické kazetě byla sada tří stejných mýdel a parfém za 845 Kč. Celá kazeta stále 951 Kč. Kolik stojí jedno mýdlo, má-li pouzdro kazety hodnotu 25 Kč?*
- (4) *V naší třídě je 29 žáků. 12 dětí má sestru, 18 dětí má bratra. Alena, Boris a Tomáš nemají žádného sourozence. Kolik dětí ve třídě má bratra i sestru?*
- (5) *Mirek dostal peníze na nákup tenisových míčků. Kdyby koupil 5 míčků, zbylo by mu ještě 10 Kč. Kdyby koupil 7 míčků, musel by si ještě 22 Kč půjčit. Kolik korun stojí jeden tenisový míček?*

Slovní úlohy a jejich řešení

Slovní úlohy tvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prolínají celým matematickým učivem. Jejich řešení je považováno za přetrvávající metodický problém.

- mají svoji **matematickou strukturu**, která je dána probíraným učivem – zadané údaje (podmínky úlohy), hledané údaje (otázka úlohy nebo požadavek na řešení) a vztahy mezi nimi,
- **kontextová stránka slovní úlohy, její námět, téma**. Námětem slovní úlohy může být jakákoli reálná situace. Tematika slovních úloh čerpá z reálného, žákům blízkého prostředí školy a rodiny, obce, regionu, z historie, z aktuální technické a ekonomické praxe, využívá poznatků z jiných školních předmětů a rozmanitých oblastí života společnosti, zábavné a rekreační matematiky. Slovní úloha má být pro žáka vždy určitou výzvou - kontextová stránka musí provokovat jeho zvědavost,
- slovní úlohy mohou být **různým způsobem prezentovány, formátovány, „aranžovány“** (textem, diagramem, ...)

Především z didaktických důvodů se slovní úlohy, v nichž se aplikují vědomosti a dovednosti žáků o početních výkonech, třídí na jednoduché a složené.

Jednoduchá slovní úloha se řeší jedním početním výkonem. Obvykle je v jednoduché slovní úloze vyjádřena reálná situace se dvěma známými údaji. Otázka úlohy je zaměřena na určení neznámého údaje, který je s údaji danými v určitém vztahu.

Můžeme je zařadit do následující typologie:

a) úlohy na sčítání:

- o určení součtu

Ve třídě je 12 chlapců a 15 děvčat. Kolik je ve třídě všech žáků?

- o zvětší číslo o několik jednotek

Z jednoho pole se sklídilo 127 tun brambor, z druhého o 58 tun více. Kolik tun brambor se sklídilo z druhého pole?

b) úlohy na odčítání

- o určení rozdílu

Dědeček natrhal 87 kg jablek, 45 kg prodal. Kolik kg jablek mu zůstalo?

- o zmenšení čísla o několik jednotek

Petr má 20 knih, Ondra má o 6 knih méně. Kolik knih má Ondra?

- o porovnávání rozdílem (jsou dána dvě čísla, má se určit, o kolik je jedno z nich menší nebo větší než druhé)

Jana má 50 korun, Mirka má 20 korun. O kolik korun má Mirka méně než Jana?

c) úlohy na násobení

- o určení součtu stejných sčítanců

Závodů se zúčastnila 4 družstva po 6 závodnících. Kolik bylo všech účastníků závodu?

- o zvětšení čísla několikrát

Chodník je široký 2 metry. Silnice je pětikrát širší. Jak široká je silnice?

- o určení počtu uspořádaných dvojic

Na jídelním lístku jsou 3 polévky a 8 hlavních jídel. Kolika způsoby se host může sestavit oběd?

d) úlohy na dělení

- o dělení (rozdělování) na stejné části

Tři chlapci se rozdělili stejným dílem o 12 bonbónů. Kolik dostal každý?

- o dělení podle obsahu

Kolik chlapců si rozdělilo 12 bonbónů, když každý dostal 4 bonbóny?

- o zmenšení čísla několikrát

Topol je vysoký 20 metrů, jabloň je pětikrát nižší. Jak vysoká je jabloň?

- o porovnávání podílem

Auto ujede za hodinu 60 km. Dobrý chodec ujede za hodinu 6 km. Kolikrát méně ujede za hodinu chodec?

Rozlišují se také úlohy přímé a nepřímé.

Přímé úlohy jsou takové, v nichž formulace zadání odpovídá početnímu výkonu, kterým se úloha řeší. Přímými úlohami jsou všechny, které byly uvedeny v ukázkách uvedeného třídění. Například formulace „o 6 méně“ v textu úlohy vede na odčítání, „pětikrát více“ vede na násobení.

Nepřímé úlohy se obvykle řeší opačným početním výkonem, než naznačuje formulace zadání. Text úlohy „svádí“ žáka k užití nesprávného početního výkonu.

Tak úloha

Ve třídě je 8 chlapců, děvčat je dvakrát více. Kolik je ve třídě děvčat?

je úloha přímá formulace „dvakrát více“ vede k násobení, úloha se násobením také řeší.

Přeformulovaná úloha, vyjadřující tutéž reálnou situaci

Ve třídě je 16 děvčat, což je dvakrát více než chlapců. Kolik je ve třídě chlapců?

je úloha nepřímá – formulace „dvakrát více“ vede k násobení, ale úloha se řeší dělením.

Složená slovní úloha vyžaduje k řešení alespoň dva početní výkony, které ovšem nemusejí být různé, například dvakrát se užije sčítání. Každý početní výkon řeší jednu úlohu jednoduchou. Složená úloha není ovšem prostou sumou dvou nebo několika jednoduchých úloh – tyto dílčí úlohy na sebe významově navazují a jsou mezi sebou funkčně propojeny. Rozmanitost složených slovních úloh je dána jednak počtem dílčích jednoduchých úloh, jednak jejich typem. Tato skutečnost prakticky znemožňuje uplatnit jakoukoliv vyčerpávající typologii.

Řešení slovních úloh

Důsledné dodržování schématu: *zápis – množinový diagram – rovnice – odpověď*.

Reálné životní problémy a situace, které je možno řešit matematickými prostředky, mohou být převedeny na matematické úlohy. Postup, jenž z dané reálné situace s reálným problémem vede k úloze matematické nebo k matematické formulaci daných vztahů, se označuje jako matematizace reálné situace (slovní úlohy). Zpětný přechod od výsledku vyřešené matematické úlohy k výsledku slovní úlohy (do reality, z níž byla matematická úloha vytvořena) je interpretace výsledku v původní situaci.

a) postup při řešení jednoduché slovní úlohy

- rozbor úlohy, včetně stručného záznamu zadání, příp. některého způsobu grafického znázornění,
- vyjádření struktury úlohy matematickou symbolikou a její řešení matematickým aparátem (převedením na aritmetickou úlohu a numerickým výpočtem) nebo řešení přímým vhladem (úsudkem) nebo grafickými nebo algebraickými metodami (rovnici či soustavou rovnic) nebo experimentem,
- kontrola správnosti jednak numerických výpočtů, jednak posouzení reálnosti řešení úlohy,
- formulace odpovědi na otázku úlohy.

b) postup řešení složených úloh

- syntetický, spočívající v syntéze jednotlivých kroků, řešení jednotlivých dílčích jednoduchých úloh (východiskem jsou podmínky úlohy, co známe?, směřujeme otázce: co z toho můžeme vypočítat?),
- analyticko-syntetický, v němž lze rozlišit fázi analytickou (jejím výsledkem je nalezení plánu řešení) a část syntetickou (v níž realizujeme plán řešení provedením numerických výpočtů).

B6b. Strany a úhly v pravoúhlém trojúhelníku, trojúhelníková nerovnost.

Algebraická a geometrická definice PV, věty obrácené, zobecněná PV.

Užití v planimetrii a stereometrii.

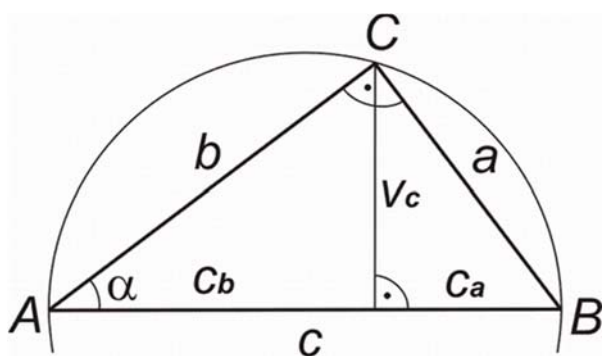
STRANY A ÚHLY V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU

Pravoúhlý trojúhelník = trojúhelník s vnitřním úhlem 90° (s pravým vnitřním úhlem)

=> pravý úhel je z vnitřních úhlů největší (zbývající dva musí dát dohromady také 90°)

=> strana proti pravému úhlu je nejdelší (**přepona**), zbývající dvě jsou kratší (**odvěsny**)

všechny pravoúhlé trojúhelníky s dalším úhlem jsou si podobné (podle věty **uu**) => mají stejný tvar => podle poměrů jejich stran zavádíme goniometrické funkce, které z úhlu tento poměr vyprodukují.



- strana **c** je **přeponou** trojúhelníku **ABC**
- strany **a, b** jsou **odvěsnami** trojúhelníku **ABC**

Trojúhelník lze sestavit, platí-li trojúhelníková nerovnost. Součet dvou stran je větší než velikost třetí.

Goniometrické funkce

V pravoúhlém trojúhelníku platí základní goniometrické funkce a jejich vztahy.

Goniometrické funkce sinus, kosinus (cosinus), tangens a kotangens (cotangens)

- vyjadřují (poměr) mezi jednotlivými délkami stran v pravoúhlém trojúhelníku.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$$

TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

Trojúhelníková nerovnost je důležitý vztah, který v trojúhelníku platí.

Součet každých dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí.

Pro strany každého trojúhelníku ABC tedy platí tři nerovnosti

$$a < b + c$$

$$b < a + c$$

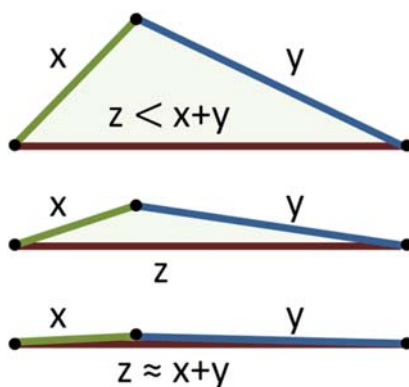
$$c < a + b$$

Vyjádříme-li a ze všech tří nerovností, dojdeme k úspornějšímu zápisu téhož

$$|b - c| < a < b + c$$

Úsečky o délkách a, b, c jsou stranami trojúhelníku, právě když platí

$$|b - c| < a < b + c$$



Co by se stalo, kdyby tato nerovnost neplatila? Tj. pokud platilo, že jedna strana je delší než zbývající dvě v součtu? Nemohl by vzniknout trojúhelník, protože ty dvě strany budou příliš krátké a „nedosáhnou na sebe“

$$a > b + c$$

Trojúhelník nemůže vzniknout

Pokud by tam platila rovnost, tj. dvě strana by byly v součtu stejně dlouhé jako třetí, strana, pak by při pokusu naryšovat trojúhelník by všechny body ležely na jedné přímce:

$$a = b + c$$

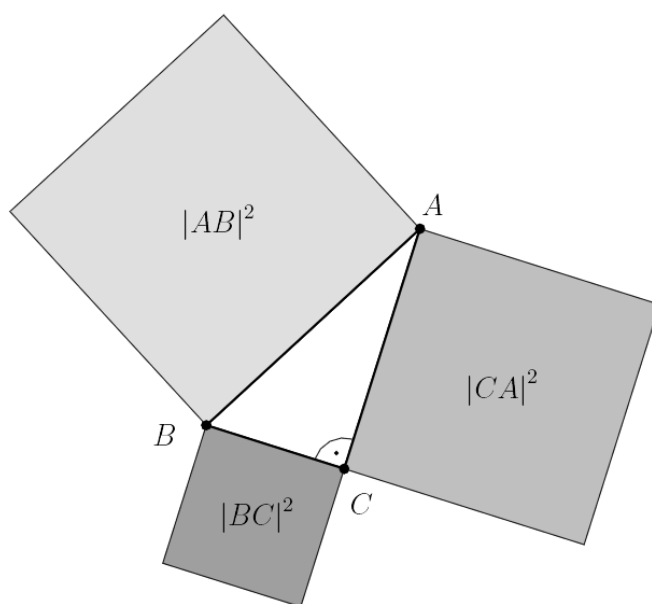
Trojúhelníková nerovnost se používá i při definicích jiných pojmů, často nějak souvisejících se vzdáleností, kde je tento princip nejpřirozenější. Pokud se budeme bavit o vzdálenostech v reálném světě, tak jistě platí, že přímá cesta (vzdušnou čarou) z Prahy do Brna je určitě kratší než cesta z Prahy do Liberce a pak z Liberce do Brna.

PYTHAGOROVA VĚTA

- Jedna z nejslavnějších vět celé geometrie snad i matematiky jako takové, se kterou se takřka každý setká již během povinné školní docházky.
- Je jí věta pojmenovaná podle věhlasného Pýthagora, jenž ji v 6. století př. n. l. objevil pro Evropu, resp. starověké Řecko, ačkoliv byla zřejmě známa už dřívějším starověkým civilizacím, např. Číně, částečně snad i Egyptu.

Geometrická definice

„Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou libovolného pravoúhlého trojúhelníku je roven součtu obsahů čtverců nad oběma jeho odvěsnami.“



Algebraická definice

$$c^2 = a^2 + b^2$$

kde a a b jsou délky odvěsen v trojúhelníku a c je délka přepony.

Trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C právě tehdy, když pro velikosti jeho stran platí

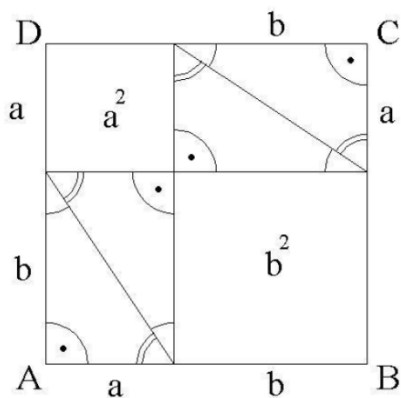
$$|AB|^2 = |BC|^2 + |CA|^2$$

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

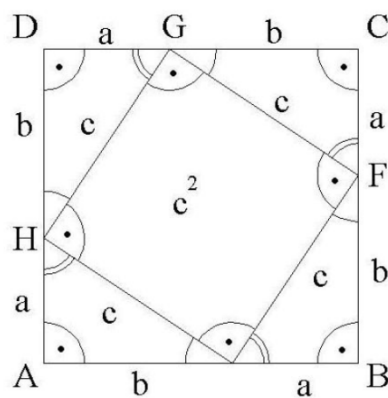
Důkaz č. 1 (grafický důkaz)

Nechť je dán čtverec o straně délky $a + b$, který můžeme složit dvěma způsoby

- Na obrázku **a)** je tento čtverec složen ze 2 čtverců o stranách délek a a b a čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků o stranách délek a , b , c .
- Na obrázku **b)** je tento čtverec složen ze čtverce o straně délky c a čtyř shodných pravoúhlých trojúhelníků o stranách délek a , b , c .



Obrázek a)



Obrázek b)

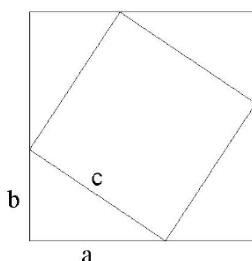
- Čtverce o stranách a a b z obrázku **a)** nám symbolizují obsahy čtverců nad odvěsnami pravoúhlých trojúhelníků.
- Čtverec o straně c z obrázku **b)** nám ukazuje obsah čtverce nad přeponou.

Ve čtvercích o stranách $a + b$ z obrázku **a)** a obrázku **b)** nám v každém ze čtverců zbudou 4 shodné trojúhelníky.

Z rovnosti obsahu čtverce o straně $a + b$ při obou způsobech složení pak plyne i Pythagorova věta $c^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz č. 2

Čtyři stejné trojúhelníky o stranách a , b , c složíme tak, aby vytvořily čtverec o straně $a + b$ s prázdným čtvercem o straně c uprostřed.



Podle obrázku vidíme, že obsah velkého čtverce můžeme vypočítat dvěma způsoby:

1. $S = (a + b)^2$

$$2. S = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

Z rovnice dostaneme:

$$(a + b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 / -2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Věty obrácené:

Jsou-li a, b, c délky stran v trojúhelníku a platí-li pro ně $c^2 = a^2 + b^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý a c je délka přepony.

Délku strany a nebo b získáme po jednoduché úpravě rovnice.

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

Pomocí obrácené Pythagorovy věty rozhodujeme o tom, zdaje daný trojúhelník pravoúhlý.

Zobecnění Pythagorovy věty

Nahrazení čtverců jinými obrazci

Čtverce lze ve formulaci věty zaměnit jakýmkoliv jinými obrazci (kružnicí, obdélníkem, trojúhelníkem, pětiúhelníkem) za předpokladu, že jsou si navzájem podobné a jejich šířka je úměrná délce příslušné strany trojúhelníka.

Součet obsahů těchto obrazců nad odvěsnami bude opět shodný s obsahem obrazce nad přeponou. Že to vyplývá z formulace původní věty se čtverci nad stranami trojúhelníka, si uvědomíme, když uvážíme, že obsah každého z obrazců je díky platnosti předpokladů úměrný obsahu čtverce nad danou stranou a konstanta úměrnosti k je vždy táž díky vzájemné podobnosti obrazců i čtverců. Pokud dosadíme za plochu čtverců do vzorce k -násobek plochy obrazce, lze rovnici vykrátit číslem k a dostaneme hledané zobecnění.

✓ Proof

$$OM = \frac{AB}{2} \cdot \tan(\alpha)$$

$$Area_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot OM = \left[\frac{1}{4} \tan(\alpha) \right] \cdot AB^2$$

$$Area_{AB} = n \cdot A_{\triangle AOB} = \left[\frac{n}{4} \tan(\alpha) \right] \cdot AB^2$$

Similarly,

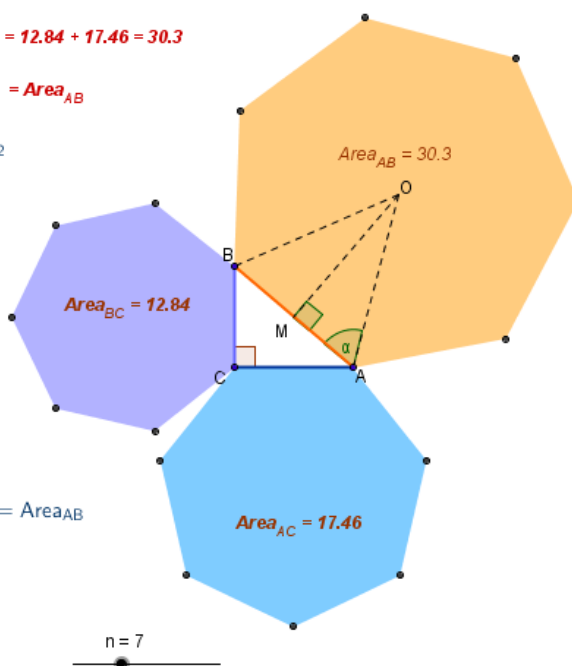
$$Area_{AC} = \left[\frac{n}{4} \tan(\alpha) \right] \cdot AC^2$$

$$Area_{BC} = \left[\frac{n}{4} \tan(\alpha) \right] \cdot BC^2$$

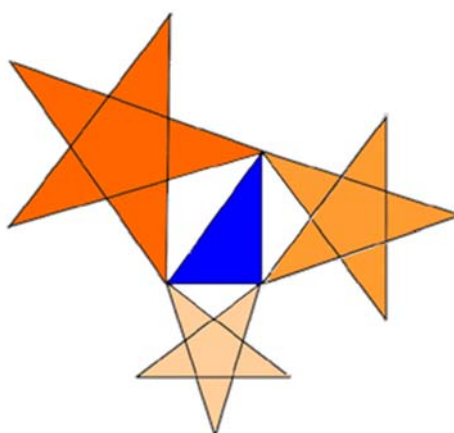
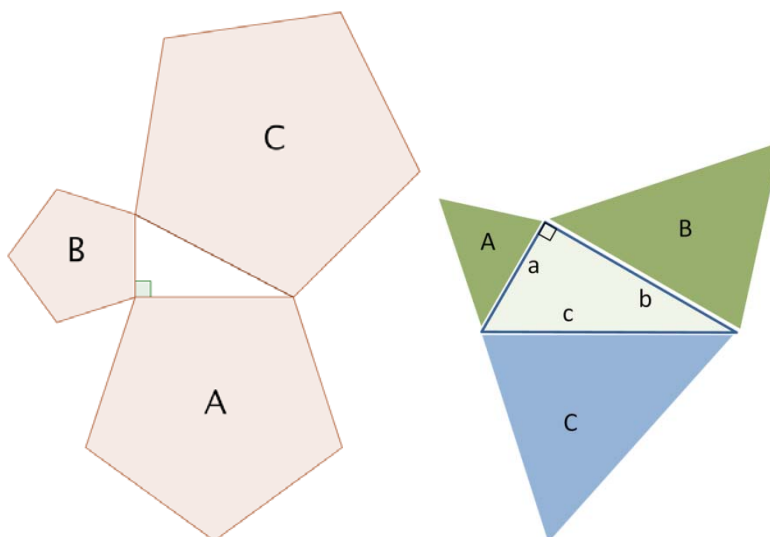
Then:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow Area_{BC} + Area_{AC} = Area_{AB}$$

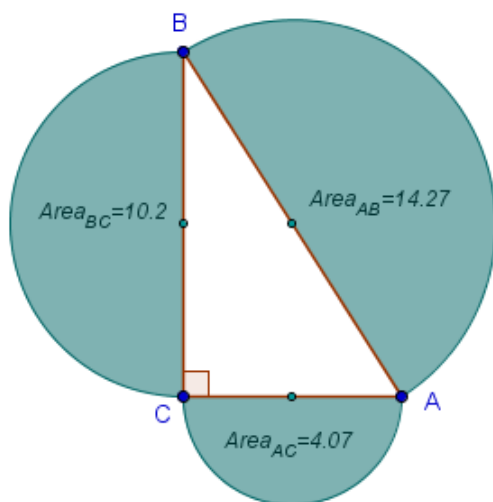
$$\begin{aligned} Area_{BC} + Area_{AC} &= \\ &= 12.84 + 17.46 = 30.3 \\ &= Area_{AB} \end{aligned}$$



$n = 7$



$$\begin{aligned}
 \text{Area}_{BC} + \text{Area}_{AC} &= \\
 &= 10.2 + 4.07 = 14.27 \\
 &= \text{Area}_{AB}
 \end{aligned}$$



$$\text{Area}_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} \cdot AB^2$$

Similarly,

$$\text{Area}_{AC} = \frac{1}{2} \left(\frac{AC}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} \cdot AC^2$$

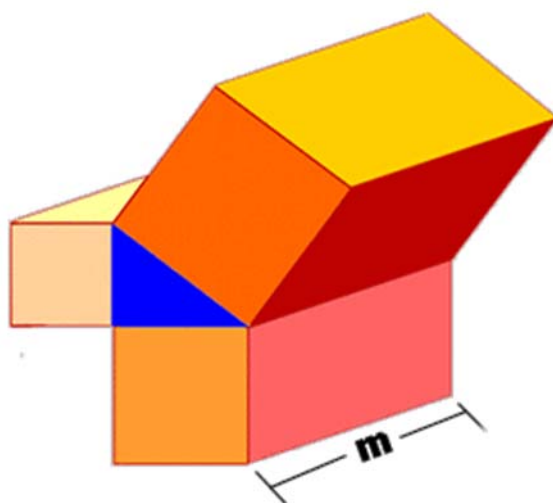
$$\text{Area}_{BC} = \frac{1}{2} \left(\frac{BC}{2} \right)^2 \pi = \frac{\pi}{8} \cdot BC^2$$

Then:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2 \Leftrightarrow \text{Area}_{BC} + \text{Area}_{AC} = \text{Area}_{AB}$$

Zobecnění na jiné dimenze

Větu lze zobecnit i na více než dvě dimenze. Například pokud umocníme délku úhlopříčky kvádru (např. cihly) na druhou, bude se toto číslo rovnat součtu čtverců délek všech tří rozměrů kvádru. Analogické vztahy platí i v euklidovských prostorech vyšších rozměrů. Matematicky řečeno je zde čtverec délky (normy) vektoru roven součtu čtverců jeho souřadnic v libovolné ortonormální bázi. Tuto představu lze zobecnit i na prostory nekonečné dimenze.



Zobecnění na jiné úhly — Kosinova věta

V trigonometrii je kosinová věta tvrzení o rovinných trojúhelnících, které umožňuje spočítat úhel v trojúhelníku na základě znalosti všech jeho tří stran.

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřními úhly α, β, γ a stranami a, b, c platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

Speciální případ kosinové věty = Pythagorova věta: Pokud je úhel $\gamma = 90^\circ$

$$\cos \gamma = 0 \text{ a tudíž } c^2 = a^2 + b^2$$

UŽITÍ V PLANIMETRII A STEREOMETRII

Planimetrie je část geometrie pojednávající o vzájemných vztazích a vzdálenostech rovinných geometrických útvarů, tj. geometrických útvarů, které jsou částí dvourozměrné roviny.

- konstrukční využití
- slovní úlohy
- určí rozměry trojúhelníku, když jedna jeho strana má rozměr $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ apod.

Stereometrie - prostorová geometrie

- Vypočítej tělesovou úhlopříčku kváдру, krychle
- Vypočítej tělesovou úhlopříčku v pravidelném šestibokém hranolu, kdy délka podstavy je 10 cm, délka hrany 15 cm.
- Vypočítej objem kváдру, když znáš $a = 7$ cm, těl. uh. = 15cm, st. uh. — 10cm?

B7a. Problematika evaluace v matematice. Měření pedagogických jevů, aplikace základních statistických pojmů v pedagogické teorii a školské praxi. Didaktické testy. Chybný výkon žáka v matematickém vyučování, jeho analýza a interpretace.

ZÁKLADNÍ FAKTA

- nezbytná součást vyučování je prověřování vědomostí, dovedností, návyků, jejich hodnocení a klasifikace
- zjištění, jestli žáci pochopili a zvládli učivo předepsané osnovami (užití na příkladech)
- výsledkem je klasifikace řízená klasifikačním řádem (stanovuje škola dle školského zákona 561/2004)

Hodnocení žáků

Každé sdělení učitelů určené žákům o jejich úspěšnosti, chybách, postojích. Zaměřuje se na hodnocení množství, rozsahu, hloubku žákova výkonu popř. na vlastnosti žákova výkonu (kvalitu, rychlost, aktivitu, samostatnost,...).

Funkce klasifikace

- kontrolní (zjištění stavu vědomostí a dovedností žáků)
- vzdělávací (prohlubování vědomostí a dovedností žáka)
- výchovná (odpovědnost žáků za výsledky své práce)
- diagnostická (zjišťování stupně osvojených vědomostí a dovedností)
- informační (poskytnutí zpětné vazby hodnocenému, hodnotiteli, rodičům, školské správě)
- motivační (formativní – většinou pozitivní stránka hodnocení – potřeba žáka zažít úspěch)

Pro splnění všech funkcí musí být hodnocení a klasifikace průběžné, komplexní, objektivní a pravdivé.

K prověřování práce žáků používáme zejména ústní zkoušení, písemné zkoušky, hodnocení výsledků samostatné práce, pozorování práce žáků, kontrola domácí přípravy žáka.

Informace získáváme:

- didaktický test (nástroj systematického zjišťování výsledků výuky, vlastnosti: validita, reliabilita, praktičnost, obtížnost, citlivost)
- pozorování (standardizované – ověřené na vzorku populace, nestandardizované – písemka)
- projekty (školní, domácí, krátkodobé, střednědobé, dlouhodobé)
- aktivity žáků (průběžná práce, vlastní zkoumání, pokusy)

Metody získávání informací je vhodné kombinovat, aby se vyvážily určité klady a nedostatky.

Nezapomínat při klasifikaci na žáky se specifickými vývojovými poruchami(3-4% žáků):

- dyslexie (specifická vývojová porucha čtení)
- dysgrafie (specifická vývojová porucha psaní)
- dysortografie (spec. výv. porucha pravopisu)
- dyskalkulie (spec. výv. porucha počítání)
- dyspinxie (s. v. p. jemné motoriky – jemná motorika, tedy jen ruce)
- dysmuzie (s. v. p. hudebních schopností)
- dyspraxie (s. v. p. hrubé motoriky)

Většinou je výskyt vývojových poruch v kombinaci. Vznikají specializované třídy mateřských a základních škol i ZŠ pro děti se specifickými poruchami učení.

Při zjišťování úrovně žákovských vědomostí a dovedností musí volit učitel takové formy a druhy zkoušení, které odpovídají schopnostem žáka a na něž nemá případná porucha negativní vliv.

Současné trendy v hodnocení:

- od subjektivního hodnocení k vyšší objektivitě
- od globálního hodnocení k diferencovanému
- od externího hodnocení k internímu
- od sumativního hodnocení k formativnímu
- od hodnocení faktografických vědomostí k hodnocení porozumění
- od úloh s výběrem odpovědi k úlohám s tvorbou odpovědi (popř. odpovědi s otevřeným koncem)
- od abstraktních matem. úloh ke kontextovým
- od hodnocení toho co žáci nevědí, k hodnocení toho co vědí

Didaktický test

Jeden z nejpoužívanějších zdrojů informací pro hodnocení ve školské praxi je nestandardizovaný test.

Základní vlastnosti:

- validita - platnost
- reliabilita - spolehlivost
- praktičnost
- obtížnost
- citlivost

Etapy konstrukce (sestavení) testu

1. analytická fáze – stanovení cíle, vymezení obsahu
2. syntetická fáze – výběr vhodných úloh, vypracování zadání testu
3. optimalizační fáze – ověření kvality sestaveného testu na vzorku žáků

Pozorování

Sledování smyslově vnímatelných jevů, zejména chování osob, průběh dějů.

Rozlišujeme pozorování:

- standardizované a volné (nestandardizované)
- terénní a laboratorní
- systematické a nesystematické
- zúčastněné a nezúčastněné

Dalším zdrojem informací pro hodnocení může být průběžná práce žáků ve vyučování, realizace praktických úkolů, vlastní bádání (zkoumání, pokusy).

Vhodné je metody kombinovat, aby jejich klady i nedostatky byly vyvážené.

Hodnocení testu – užití jednoduchých statistických postupů

Ohodnotíme zcela správné řešení úloh odpovídajícím počtem bodů (dle obtížnosti a zvládnutí učiva). Získáme maximální počet bodů a provedeme převod na klasifikační stupnici. Správnost takové stupnice je samozřejmě relativní.

Běžně učitel dále sestavuje tzv. frekvenční tabulku výsledků (známek), dosažených v konkrétní třídě.

Dále se může stanovit aritmetický průměr, případně další charakteristiky souboru dat (modus, medián).

aritmetický průměr – podíl součtu hodnot a počtem těchto hodnot

modus – např. známka, která byla dosažena nejčastěji

medián – např. známka, která je středním členem uspořádané posloupnosti dosažených známek

Chybný výkon žáka

Chybovat je lidské. Kdo nic nedělá, nic nezkazí.

Tyranie správné odpovědi – důraz na naprostou správnost řešení (přetrvává silná bariéra mezi žákem a předmětem, žákem a učitelem). Strach z chyby paralyzuje žáka.

Chybou rozumíme výkon, který je nesprávný, nedostačuje požadovaným cílům učení. K profesním dovednostem učitele matematiky patří nejen odhalit, ale také identifikovat a správně interpretovat chybný výkon žáka.

Klasifikace chyb:

- podle kognitivní hodnoty (smysluplné, nesmysluplné)
- podle nositele chyby (individuální, hromadné)
- podle závažnosti (podstatné, nepodstatné)
- podle typičnosti (běžné, neobvyklé)
- podle organizovanosti (pravidelné, nahodilé)

Učitel matematiky se obecně zaměří na zjištění, že chyba je (nikoliv na její příčinu).

Práce učitele s chybou žáka, etapy (fáze):

- detekce chyby (zjištění, jak se žák chyby dopustil)
- identifikace chyby (posouzení, jaká to chyba je)
- interpretace chyby (hledání příčin, proč k chybě došlo)
- korekce chyby (odstranění, oprava, reedukace chyby)

Příklad:

Ukázka možného zpracování didaktického testu pro 4. ročník ZŠ

1. Vypočítej a výsledky zaokrouhli na desítky:

$$21 + 37 \quad 68 - 15 \quad 30 + 85$$

$$62 + 19 \quad 72 - 23 \quad 27 + 50$$

2. Jeden sčítanec je 9, druhý sčítanec je jeho trojnásobkem. Urči součet.

3. Vypočítej:

$$200 + 600$$

$$500 + 400$$

$$900 - 300$$

$$700 - 700$$

$$500 + 500$$

$$800 - 0$$

4. Turista cestoval autobusem a vlakem. Za jízdenku na autobus zaplatil 110 Kč, za jízdenku na vlak o 40 Kč méně. Kolik zaplatil za obě jízdenky dohromady?

5. Narýsuj úsečku AB délky 4 cm. Potom narýsuj úsečku CD, která je shodná s úsečkou AB. Urči grafický součet úseček AB a CD.

6. Petr si koupil čokoládu a knížku. Knižka stála 70 Kč, což bylo desetkrát více, než čokoláda. Kolik utratil? Kolik mu zůstalo ze stokoruny?

V úloze č. 6 testu se stává typickou chybou žáka např. následující řešení:

Knížka ... 70 Kč, čokoláda stojí **70: 7 = 10 Kč**, celý nákup stál $70 + 10 = 80$ Kč, vrátili mu $100 - 80 = 20$ Kč.

Evaluace (z fr. évaluer, vyhodnotit) znamená:

1. vyhodnocení nějakého předmětu, oblasti, získání spolehlivých informací o něm,
2. případně i jeho zhodnocení, to jest systematické přisouzení hodnoty, stanovení kvality

O evaluaci se hovoří tam, kde se hodnocení zakládá na důkladném sběru informací a na jejich odborném zpracování s cílem získat spolehlivé podklady pro případná rozhodnutí. Ve společenských vědách je evaluace součástí empirických metod zkoumání. Protože evaluace obvykle souvisí s připravovaným nebo očekávaným rozhodováním, musí čelit různým, často protichůdným tlakům a dílčím, skupinovým zájmům. Zároveň je zde velké nebezpečí zneužití domněle objektivních informací k prosazení těchto zájmů. V tomto smyslu mohou zaujaté a tedy nepravdivé "evaluace" sloužit jako zástěrka pro další rozhodnutí.

Evaluace lze rozlišovat podle více kritérií:

- zda má sloužit:
 - vědeckým účelům a týká se tedy například účinnosti metod a prostředků,
 - spíše praktickým účelům a týká se konkrétního procesu, instituce;
- kdo ji provádí a jaké si přitom stanovil cíle:
 - ten, kdo má rozhodovat, například majitelé firmy, vedení resortu a podobně;
 - hodnocená instituce sama, tzv. autoevaluace;
 - nezávislá instance, tisk, občanské sdružení;
- ve které fázi se evaluace provádí:
 - plánovací evaluace (při plánování, resp. před započítím procesu/projektu, někdy označována též jako ex-ante evaluace)
 - formativní evaluace (v průběhu realizace procesu/projektu, někdy označována též jako průběžná či interim evaluace)
 - sumativní evaluace (souhrnné zhodnocení po ukončení procesu/projektu, někdy označována též jako ex-post evaluace)
- nějaký druh informací se evaluace zaměřuje:
 - evaluace cílů
 - evaluace procesů
 - evaluace kvalitativních změn

Při evaluaci se využívá široká škála kvantitativních i kvalitativních metod a technik, např.:

- Dotazníkové šetření
- Experiment
- Průzkum veřejného mínění
- Kvalitativní analýza
- Kvalitativní výzkum
- Pozorování
- Případová studie
- Statistika
- Testování hypotéz

Klíčovým momentem evaluace je zajištění nestranného a věcného zhodnocení, přiměřené přisouzení váhy jednotlivým informacím, výzkumům atd., včetně sestavení hodnotícího sboru odborníků.

B7b. Množiny bodů dané vlastnosti, konstrukční úlohy. Thaletova kružnice.

Jedná se o množiny bodů v rovině, v nichž jsou všechny body, které mají danou vlastnost, a žádné jiné.

Symbolicky zapisujeme $M = \{X \in \rho; \varphi(X)\}$, kde φ je výrok týkající se bodu X ve vztahu k jiným objektům roviny ρ .

Množina M všech bodů roviny ρ s danou vlastností, je množina, pro kterou platí:

- Každý bod s danou vlastností patří do množiny M .
- Každý bod množiny M má danou vlastnost.

Podmínky je možné za pomoci obměny nahradit ekvivalentními výroky:

- Každý bod, který má danou vlastnost, patří do množiny M .
- Každý bod, který nemá danou vlastnost, nepatří do množiny M .

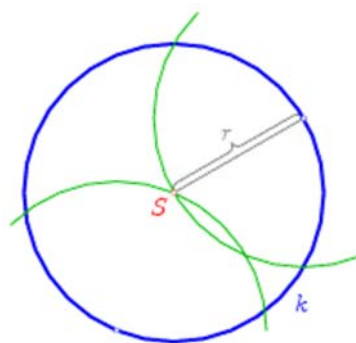
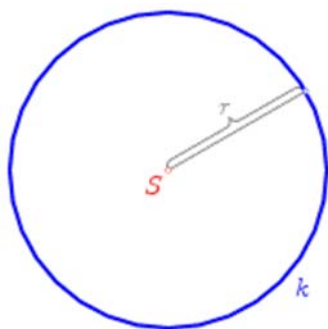
Při vyšetřování konkrétní množiny bodů dané vlastnosti v rovině je nutné potvrdit obě tyto podmínky. Příkladem množiny bodů dané vlastnosti může být kružnice zadaná středem S a kladným reálným číslem (poloměrem) r , což je množina všech bodů, které mají od středu stejnou danou vzdálenost. Symbolicky v rovině ρ lze zapsat $M = \{X \in \rho; |XS| = r\}$.

Každý bod X , který je od středu vzdálen r , leží na této kružnici. Oproti tomu, každý bod kružnice je od středu vzdálen r . Je tedy potvrzeno, jak tato množina vypadá. Druhým tvarem podmínek se kružnice vyjádří takto: Každý bod, jehož vzdálenost od středu je rovna r , náleží kružnici. Naopak každý bod, jehož vzdálenost od středu je různá od r , na kružnici neleží.

Přehled nejužívanějších množin všech bodů dané vlastnosti v rovině

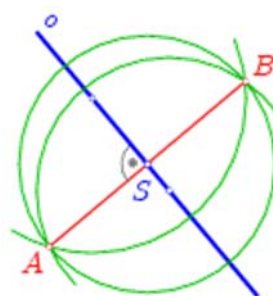
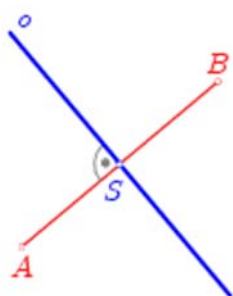
1, Kružnice

- množina všech bodů, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r , je kružnice $k(S, r)$
- tato kružnice je také množinou všech středů kružnic, jež mají daný poloměr r a procházejí daným bodem S



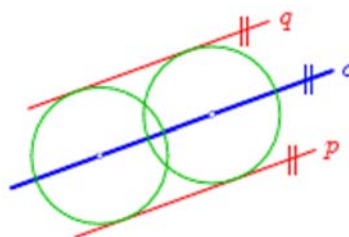
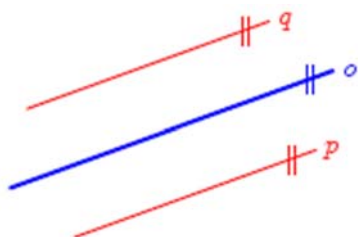
2, Osa úsečky

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých bodů A, B , je osa úsečky AB , která je kolmá k úsečce AB a prochází jejím středem S
- tato osa úsečky je také množinou všech středů kružnic, jež procházejí danými body A, B



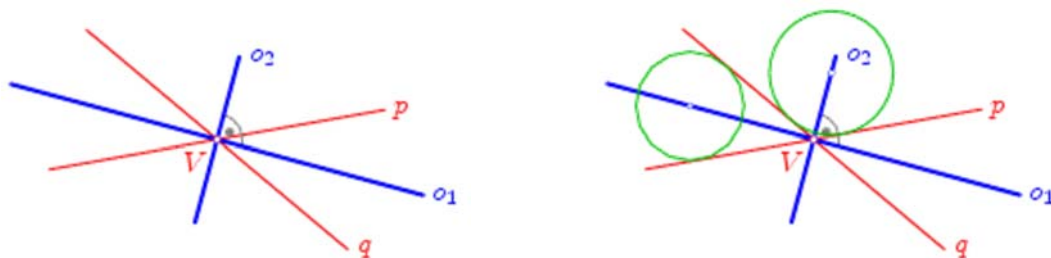
3, Osa pásu

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných navzájem různých rovnoběžek p, q , je osa pásu jimi omezeného
- tato osa pásu je také množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných rovnoběžek p, q



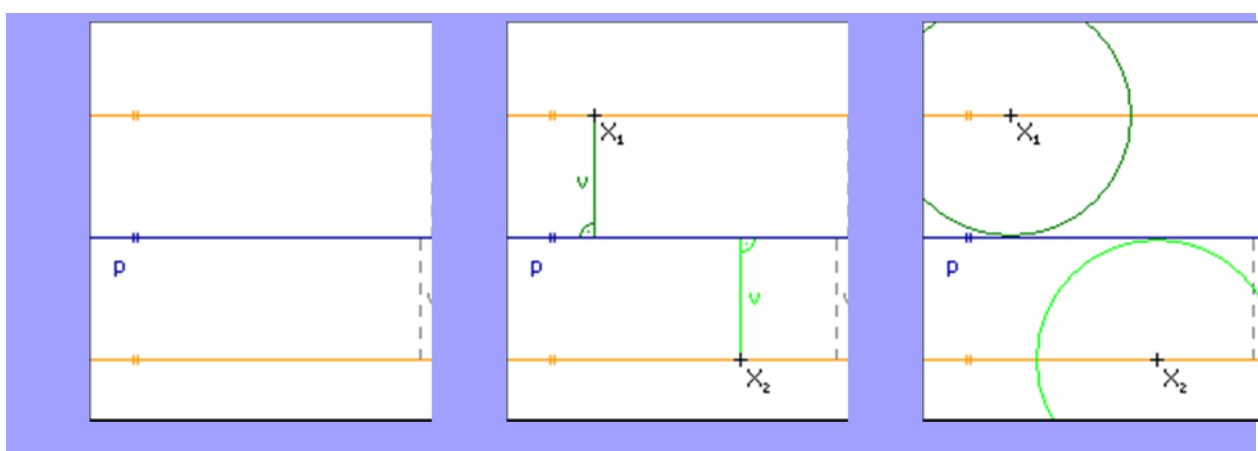
4, Osa úhlu

- množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek p, q , jsou navzájem kolmé osy úhlů sevřených přímkami p, q
- tyto osy úhlů jsou také vyjma jejich průsečíku V množinou všech středů kružnic, jež se dotýkají daných různoběžek p, q



5, Ekvidistanta přímky

- množina všech bodů v rovině, které mají od dané přímky p stejnou vzdálenost, se nazývá ekvidistanta přímky p .
- jinou možností, jak ekvidistantu o vzdálenosti v definovat, je množina středů všech kružnic o poloměru v , které se přímky p dotýkají (přímka p je jejich tečnou).



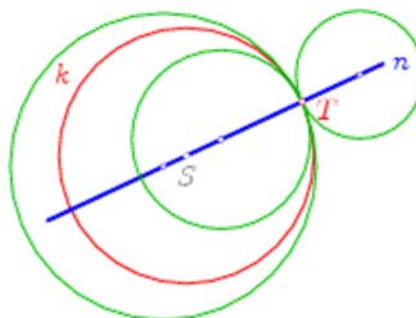
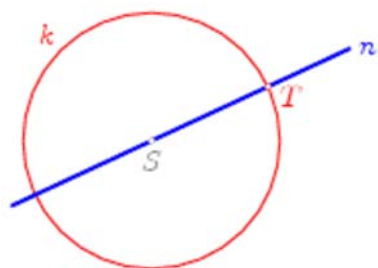
6, Normála přímky

- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané přímky p v jejím daném bodě T , je přímka n jdoucí daným bodem T kolmo k dané přímce p (normála přímky p v bodě T) vyjma bodu T



7, Normála kružnice

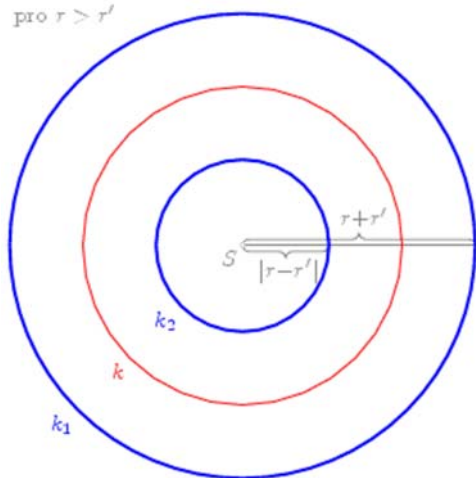
- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S, r=|ST|)$ v jejím daném bodě T , je přímka $n=ST$ (normála kružnice k v bodě T) vyjma bodů S, T



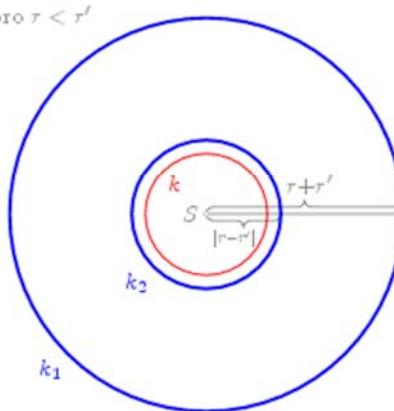
8, Soustředné kružnice

- množina všech středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k(S,r)$ a mají daný poloměr r' , jsou soustředné kružnice $k_1(S, r+r')$ (pro vnější dotyk s k) a $k_2(S, |r-r'|)$ (pro vnitřní dotyk s k)

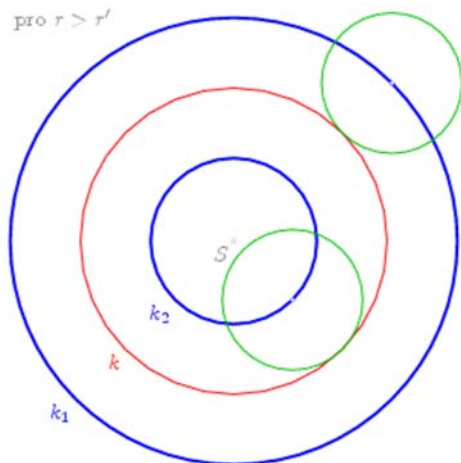
pro $r > r'$



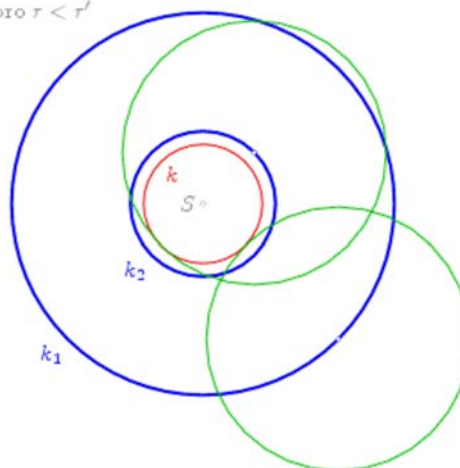
pro $r < r'$



pro $r > r'$

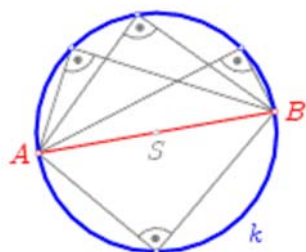


pro $r < r'$



Thaletova kružnice

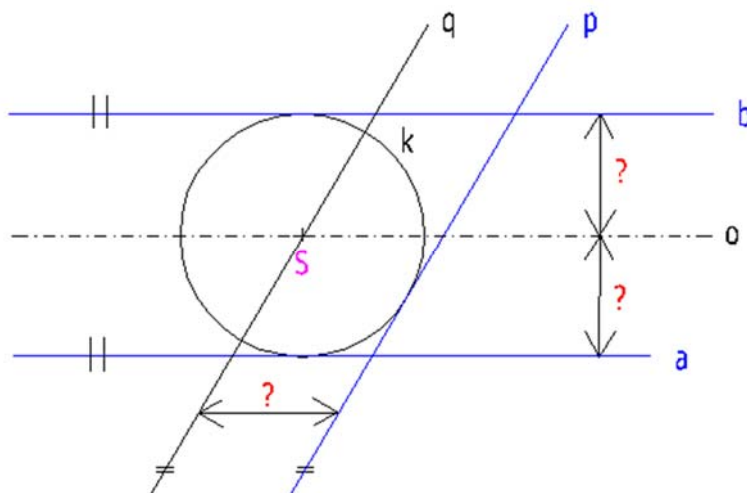
- množina všech bodů, z nichž je danou úsečkou AB vidět pod pravým úhlem, je kružnice sestavená nad průměrem AB (tzv. Thaletova kružnice nad daným průměrem) vyjma bodů A, B



- tato Thaletova kružnice je jinak také množinou všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými dvěma různými body A, B

Př.: Sestrojte kružnici k , která se dotýká dvou libovolných rovnoběžek a , b vzdálených od sebe 5 cm a libovolné příčky rovnoběžek p , která však není na rovnoběžky kolmá.

Náčrt a rozbor:



? Jaká musí být vzdálenost hledaného středu S kružnice k od obou rovnoběžek a , b ?

Musí být stejná, kružnice se má obou rovnoběžek dotýkat.

? Na které množině bodů bude tedy neznámý střed S ležet ?

Na ose pásu o rovnoběžek a , b

? Jaký bude poloměr kružnice k ?

2,5 cm; je to polovina vzdálenosti rovnoběžek a , b

? Kružnice se má dotýkat příčky p , jakou vzdálenost musí mít střed S od této příčky ?

Vzdálenost musí být 2,5 cm stejně jako vzdálenost středu S od obou rovnoběžek

? Na které množině bodů bude střed S také ležet ?

Na přímkách q , q' rovnoběžných s přímkou p a vzdálených 2,5 cm od přímky p

? Co tedy můžeš říci o neznámém středu S a poloměru kružnice k ?

Leží na průniku dvou množin bodů – osy pásu o a přímky q (nebo q')

Tuto naši diskusi nahradíme při rozboru stručným zápisem:

$S \in o$, kde o je osa pásu rovnoběžek a, b

$S \in q, q \parallel p \wedge v(p, q) = 2,5 \text{ cm}$

$S \in o \cap q$

V náčrtu a v postupu konstrukce stačí pracovat pouze s jedním řešením (přímka q). Ve vlastní konstrukci uvádím všechny přímky (q, q'), které splňují podmínky úlohy.

Postup konstrukce:

1. $a \parallel b$, přímka p rovnoběžek a, b

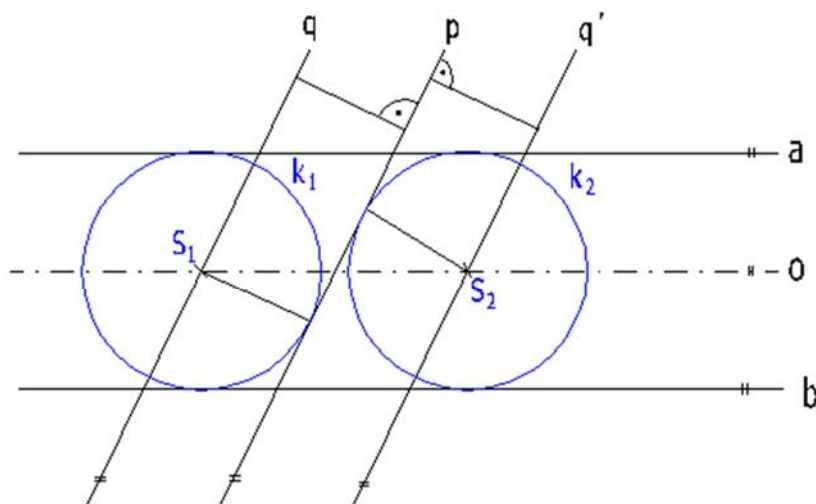
2. o je osa pásu a, b

3. $q, q' \parallel p \wedge v(p, q) = 2,5 \text{ cm}$

4. $S, S \in o \cap q$

5. $k(S; r = 2,5 \text{ cm})$

Konstrukce:



Závěr: kružnice vyhovují, úloha má dvě řešení v rovině.

B8a. Didaktické prostředky pro vyučování matematice. Učebnice matematiky, její funkce a parametry. Informační a komunikační technologie v matematickém vzdělávání. Multimediální prostředky, interaktivní systémy a technologie v matematickém vzdělávání, aktuální software pro školskou matematiku.

UČEBNICE MATEMATIKY

- **didaktické prostředky** jsou všechny předměty, které zprostředkovávají a umožňují průběh vyučovacího procesu (nejdůležitějším textovým didaktickým prostředkem je učebnice

Učebnice je druh knižní publikace uzpůsobené obsahem a strukturou k didaktické komunikaci. Nejrozšířenějším type je školní učebnice.

školní učebnice plní funkce

- prvek kurikula (prezentuje určitý výsek plánovaného obsahu vzdělávání)
- didaktický prostředek (informační zdroj pro žáky a učitele, řídí a stimuluje učení žáků)
- obecný model scénáře vyučovacího procesu

Žáci mají dostupný 1 model učebnice, učitelé mohou používat všechny učebnice mající doložku ministerstva školství. Většina učebnic vychází ze vzdělávacího programu Základní škola.

Typy učebnice

1. učebnice obsahující základní učivo matematiky II. stupně (žákovi k dispozici celé 4 roky). Většinou k ní je sbírka příkladů. Nevýhodou je stručný výklad a metodické zpracování. Výhodou je stálá možnost užití, kdykoliv opakovat z předchozích ročníků (příliš se nepoužívá).
2. Učebnice zpracováváné pro jednotlivé tematické celky. Vhodné pro nižší ročníky víceletých gymnázií nebo pro specializované třídy RVM. Výhodou je hlubší zpracování tématu, více příkladů. Nevýhodou je vyšší pořizovací cena. Vhodné také pro školy, které v rámci ŠVP změni uspořádání kapitol (v ročníku i mezi ročníky).
3. Učebnice zpracované pro příslušné ročníky ZŠ (používá se nejvíce). Klasické uspořádání (každá kapitola začíná příkladem s vysvětlením pojmů a učiva, dále příklady na procvičování). Při kratší absenci je žák schopen s touto učebnicí menší celek zvládnout sám.

Volbu učebnic řídí předmětová komise s ohledem na potřeby a možnosti školy (který typ, jaké autory). Měla by být vybrána vždy ucelená řada pro I. resp. II. stupeň ZŠ.

Analýza školní učebnice se zaměřuje na strukturu didaktického textu, jeho rozsah, obtížnost, didaktickou vybavenost atd. Učebnice matematiky prošly složitým vývojem. V úvodu každého článku bylo přehledně

a názorně shrnuto probrané učivo, pak byly cvičení dle logické návaznosti a dle obtížnosti, zajišťující upevňování učiva.

Kvalifikovaný učitel matematiky by měl dokázat posoudit kvalitu učebnice i její vhodnost pro svůj vlastní přístup, styl vyučování.

Vývoj učebnic

- do r. 1976 nazývány početnice (tenkrát se matematice říkalo počty)
- první početnice tištěna v Norimberku r. 1530, v Praze r. 1558

V současnosti používány pracovní sešity (cvičebnice, někdy součástí učebnic, procvičování formou samostatné práce), pracovní učebnice (spojení obou typů učebních textů), sbírky (numerické příklady, úlohy s vysokou motivační hodnotou,...). Některé učebnice doplněny o metodické příručky pro učitele. Různá nakladatelství (Prométheus, Fortuna,...). Aktuální informace o vydávaných učebnicích poskytují katalogy nakladatelství, odborné časopisy.

Některá kritéria objektivního hodnocení učebnic:

- kompatibilita obsahu učebnice s učební osnovou daného ročníku (vymezení v příslušném vzděl. programu)
- věcnou správnost obsahu učebnice (bez odborných nedostatků a tiskových chyb)
- didaktickou efektivitu učebnice (jak usnadňuje realizační činnost ve vyučování)
- přiměřenost textu a úloh, věku a mentální úrovni žáků (jak usnadňuje učení žákům, včetně motivačního aspektu)
- informatickou vybavenost učebnice, včetně funkčního členění do kapitol, přehledu učiva, žákům přiměřeného jazyka a grafické úpravy
- sociální kvalifikaci učebnice (zda byla ověřena v praxi a s jakým ohlasem, existence posudků, opatřena schvalovací doložkou)
- ekonomická kritéria (životnost učebnice, cena atd.)

Učební pomůcky pro matematiku

- slouží jako nástroj poznávání věcí a jevů
- východiskem reálné předměty (fyzikálního) světa, smysly dítěte vnímatelné
- zvláštní význam mají uměle vytvořené, ikonické nebo symbolické reprezentace různých matematických pojmů (znaky, modely, grafická schémata)

Rozlišujeme učební pomůcky

- demonstrační (pracuje s nimi učitel, často při výkladu nového učiva)

- žákovské (multiplikáty), s nimi pracují jednotliví žáci

Zásady při práci s učebními pomůckami

- výběr a příprava učebních pomůcek (učitel má přehled o pomůckách na škole, o nových pomůckách na trhu – katalogy, nakladatelství, odborné časopisy)
- používání pomůcek ve vyučování (pomůcky nejsou cíle výuky, pouze prostředkem ke zvýšení efektivity vyučování)

Příklady tradičních pomůcek:

- reálné předměty
- stavebnice
- geometrické skládanky
- hry typu puzzle
- počítadla
- demonstrační tabule
- geometrické modely těles
- čtvercové sítě, sítě se soustavou souřadnic

K vyučovacím prostředkům patří také vybavení školní třídy (tabule) a přístrojové vybavení (projektor).

Informační a komunikační technologie

- stále častější prostředky ve vyučování matematice (kalkulátory, výpočetní technika)

Využití kalkulátoru v matematice **neznamená zmenšení nároků** na počítařské dovednosti žáků.

Kalkulátor slouží ke kontrole výsledků, k urychlování a usnadnění výpočtů.

Využití kalkulátoru:

- Kalkulátorem ověřujeme a korigujeme výsledky výpočtů (metoda odhadni a zkontroluj).
Odhadni výsledek a svůj odhad zapiš. Potom vypočítej pomocí kalkulátoru a porovnej výsledek se svým odhadem: $103292 : 28 =$
- Kalkulátor je využíván i ve smyslu didaktické (učební) pomůcky ke hrám nebo soutěžím (hra kalkulátor píše, soutěž počítání s kalkulátorem a bez něj,...).
Vypočítej písemně a výsledek zkontroluj výpočtem na kalkulátoru: $103\,292 : 28 =$

Je potřeba systematické snahy o modernizaci vzdělávání s ohledem na rozvoj informační společnosti.

Základní cíle:

- zajištění kvalitního ICT vzdělávání učitelů (rozvoj informační a počítačové gramotnosti)

- rozvoj podílu ICT do výuky jednotlivých předmětů
- zajištění dostupnosti technologií (dodávka a správa HW, připojení k internetu)

Využívání ICT není vázáno jen na jeden předmět. Využití ICT lze ve výuce matematiky, chemie, jazyků, fyziky,

Interaktivní výuka

Novou metodou je interaktivní výuka, jejímž hlavním cílem je nabídnout žákům zábavnější a méně stereotypní formu výuky. Tím se zvětší jejich motivace k učení. Dalším cílem je aktivní zapojení žáků do výuky.

Interaktivní výuka nejčastěji probíhá pomocí interaktivní učebnice a interaktivní tabule. Důležitým znakem interaktivního vyučování je názornost a systematickosti. Součástí výuky jsou audio video nahrávky s materiály, webové odkazy s dalšími informacemi o probírané látce. Důraz je kladen i na mezipředmětové vazby, což pomáhá dětem uvědomit si, že jednotlivé poznatky je nutné kombinovat s jinými, propojovat je, nikoliv separovat.

Multimédia

Pokud má být vzdělávací proces účinný, je potřeba optimalizovat vzdělávání jako celek (obsah, metody, prostředky). Jedním z nástrojů jsou moderní technologie, multimédia, didaktická technika.

Didaktická technika – soubor materiálních výukových prostředků (strojů, přístrojů, technických zařízení), který má bezprostřední vztah k plnění výukových cílů.

Vyučovací prostředky:

- nemateriální (vyučovací metody, organizační formy, vyučovací zásady)
- materiální (vyučovací a žakovské pomůcky, školní prostory a jejich vybavení, didaktická technika)

Multimédia – kombinace různých sdělovacích prostředků, fotografií, ... pohledy na tento pojem:

1. klasický – souhrn jednotlivých médií, jejichž pomocí lze informaci prezentovat (učebnice, videokazeta,...)
2. počítačový – způsob prezentace dané informace (textově, graficky, pomocí zvuku či obrazu). Odtud pak pojem multimediální počítač (PC vybavený pro zpracování a prezentaci zvuku či obrazu).

B8b. Konstrukce trojúhelníků podle vět sss, sus, usu, Ssu (ssu). Konstrukce s využitím dalších prvků (výšky, těžnice, kružnice opsaná a vepsaná, úsekový úhel).
Čtýrúhelníky, jejich dělení a základní konstrukce. Užití při řešení úloh.

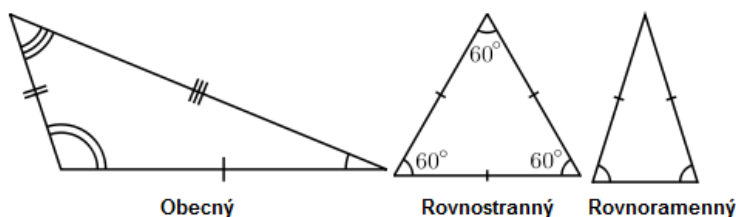
Trojúhelník - teorie

- je geometrický útvar určený třemi body, neležícími v jedné přímce.
- definujeme jej jako průnik 3 polorovin určených body ABC
- součet vnitřních úhlů je 180°
- strany trojúhelníku splňují trojúhelníkové nerovnosti: Součet dvou libovolných stran je vždy delší než strana třetí, neboli $a + b > c$, $a + c > b$, $b + c > a$, kde a , b , c jsou strany trojúhelníku.

Druhy trojúhelníků

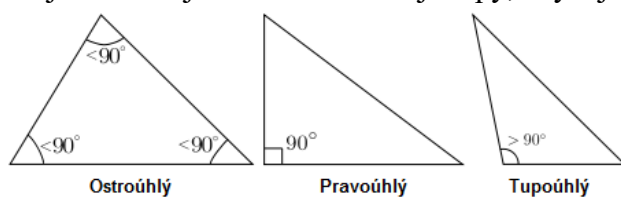
Podle stran

- Obecný trojúhelník (též různostranný) – žádné dvě strany nejsou shodné
- Rovnoramenný trojúhelník – dvě strany jsou navzájem shodné, ale nejsou shodné s třetí stranou
- Rovnostranný trojúhelník – všechny strany jsou shodné



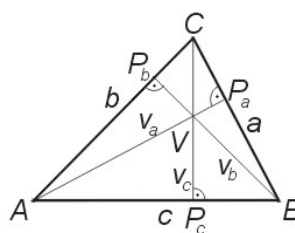
Podle úhlů

- Ostroúhlý trojúhelník – všechny vnitřní úhly jsou ostré
- Pravoúhlý trojúhelník – jeden vnitřní úhel je pravý, zbývající dva jsou ostré
- Tupoúhlý trojúhelník – jeden vnitřní úhel je tupý, zbývající dva jsou ostré



Výška

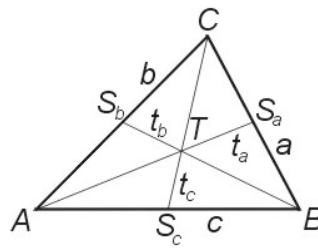
- je úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem na protější stranu.
- Přímký, na nichž leží výšky, se protínají v jednom bodě, který se nazývá **ortocentrum**.
- Ortocentrum leží buď uvnitř trojúhelníku, pokud je ostroúhlý, nebo u pravoúhlého trojúhelníka splývá s jeho vrcholem, při němž je pravý úhel anebo leží vně u tupoúhlého trojúhelníka.



výšky v_a , v_b , v_c
páty výšek P_a , P_b , P_c
ortocentrum ... V

Těžnice

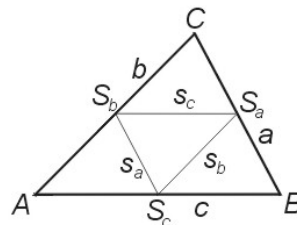
- úsečka, jejímiž krajními body jsou střed strany a protilehlý vrchol trojúhelníku.
- se protínají v jednom bodě, který se nazývá **těžiště**.
- Těžiště rozděluje každou těžnici na dva díly v poměru 2 : 1, přitom vzdálenost těžiště od vrcholu je dvojnásobek vzdálenosti od středu protější strany.



těžnice t_a, t_b, t_c
 středy stran ... S_a, S_b, S_c
 těžiště T

Střední příčka

- spojnice středů dvou stran (dvou pat těžnic).
- rovnoběžná s příslušnou stranou a má velikost poloviny příslušné strany.
- Střední příčky dohromady rozdělují trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky



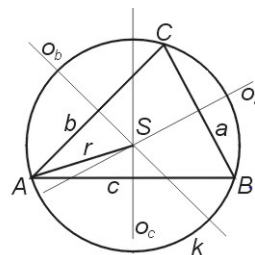
střední příčky ... s_a, s_b, s_c
 středy stran S_a, S_b, S_c

Eulerova přímka

- přímka, která prochází těžištěm a ortocentrem.
- Na Eulerově přímce leží i střed kružnice opsané

Kružnice opsaná trojúhelníku

- kružnice, která prochází všemi vrcholy trojúhelníku.
- Střed kružnice opsané leží v průsečíku os stran, poloměr se rovná vzdálenosti středu libovolného vrcholu.

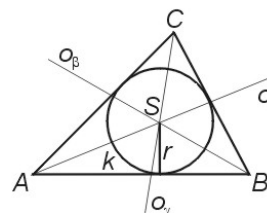


kružnice opsaná ... $k(S;r)$
 osy stran o_a, o_b, o_c
 střed kružnice $S \in o_a \cap o_b \cap o_c$
 poloměr kružnice ... $r = |AS|$

od

Kružnice vepsaná trojúhelníku

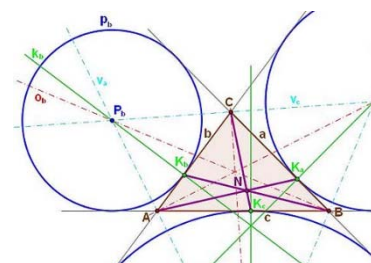
- je kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku.
- Střed kružnice vepsané leží v průsečíku os vnitřních úhlů, poloměr se rovná kolmé vzdálenosti středu od libovolné strany.



kružnice vepsaná ... $k(S;r)$
 osy úhlů o_a, o_b, o_c
 střed kružnice $S \in o_a \cap o_b \cap o_c$
 poloměr kružnice ... $r = |S, AB|$

Kružnice připsaná trojúhelníku

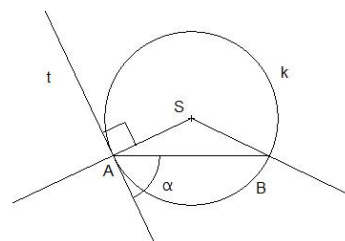
- je kružnice, která se dotýká jedné strany trojúhelníku a přímk, které jsou prodloužením zbývajících stran trojúhelníku.
- Střed kružnice připsané leží v průsečíku osy jednoho vnitřního úhlu a dvou vnějších úhlů při zbývajících dvou vrcholech. Každý trojúhelník má tři kružnice připsané.



dvou

Úsekový úhel

- úhel, jenž svírá tětiva AB kružnice k s tečnou t



Obvod a obsah

Obvod: $o = a + b + c$, kde a, b, c jsou strany trojúhelníku

Obsah: $S = \frac{a \cdot v_a}{2}$, kde v_a je výška příslušná straně a

Heronův vzorec: $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, kde $s = \frac{o}{2}$, kde o je obvod

Konstrukce trojúhelníku

Při každé konstrukci budeme dodržovat následující schéma:

1. Rozbor

- Rozbor bude vždy obsahovat **náčrtek**. Zde si nakreslíme od ruky trojúhelník a vyznačíme na něm barevně, co je zadáno. Náčrtek nám pomůže vymyslet, jak postupovat při konstrukci.
- Druhá část, kterou bude rozbor vždy obsahovat je určení **podmínek řešitelnosti úlohy**. V této části ověříme, jestli trojúhelník lze podle daných parametrů sestavit.

2. Zápis konstrukce

- Konstrukci zapisujeme postupně, jak ji budeme provádět pomocí matematických značek a symbolů. Jednotlivé body konstrukce píšeme na zvláštní řádky a označujeme čísly.

3. Konstrukce

- Přesně podle pravítka, kružítko, úhloměru a dalších rýsovacích pomůcek sestavíme zadaný trojúhelník.

4. Diskuze

- Určen počet řešení v jedné polorovině.

Trojúhelník může být určen:

- (sss) délkou všech tří stran
 - o při konstrukci nejprve strana a 2 kružnice – jejich průnik 3. bod
- (sus) délkou dvou stran a velikostí úhlu, který svírají
 - o strana, polopřímka svírající daný úhel, kružnice – průnik kružnice a polopřímky 3. bod
- (usu) délkou strany a velikostí úhlů, které k ní přiléhají
 - o strana, 2 polopřímky o daných úhlech – kde se protnou, třetí bod
- (Ssu) délkou dvou stran a velikostí úhlu proti větší z nich
 - o strana, polopřímka svírající daný úhel, kružnice – průnik kružnice a polpř.

Konstrukce se zadanou výškou

- využití vlastnosti, že výška určuje vzdálenost bodu od protější strany – konstrukce rovnoběžky se stranou ve vzdálenosti v
- využití vlastnosti, že výška je kolmá ke straně – Thaletova kružnice

Konstrukce se zadanou **těžnicí**

- využití vlastnosti, že těžnice určuje vzdálenost vrcholu od středu protější strany – kružnice
- při zadání dvou těžnic sestrojíme těžiště (ve $2/3$ délky těžnice od vrcholu)

Konstrukce se zadaným **poloměrem kružnice vepsané**

- střed kružnice leží na osách vnitřních úhlů
- poloměr je kolmá vzdálenost středu kružnice od strany (při konstrukci rovnoběžka se stranou ve vzd. $r - k$ nalezení středu)

Konstrukce se zadaným **poloměrem kružnice opsané**

- střed kružnice leží na osách stran
- poloměr je vzdálenost středu kružnice a vrcholu (kružnice z vrcholu o r – nalezení středu)

Čtyřúhelníky – teorie

- Zjednodušeně lze říci, že čtyřúhelník je n -úhelník pro $n = 4$.
- Může být **konvexní** – všechny úhly jsou menší než 180° , nebo **nekonvexní**.
- Součet vnitřních úhlů je roven 260° .

Tři základní skupiny podle rovnoběžnosti stran:

- 1) **rovnoběžník** - obě dvojice protějších stran rovnoběžné
 - a) dále se dělí buď podle úhlů:
 - i) **pravoúhlý** - čtverec, obdélník
 - ii) **kosouhlý** - kosočtverec, kosodélník
 - b) nebo podle délek stran:
 - i) **rovnostranný** - čtverec, kosočtverec
 - ii) **různostranný** - obdélník, kosodélník
- 2) **lichoběžník** - pouze jedna dvojice protějších stran rovnoběžná
 - a) kromě obecného lichoběžníka známe ještě dva speciální typy:
 - i) **rovnoramenný lichoběžník** - nerovnoběžné strany shodné
 - ii) **pravoúhlý lichoběžník** - jedno rameno kolmé k základně
- 3) **různoběžník** - čtyřúhelník, jehož žádné dvě strany nejsou rovnoběžné

Nakonec čtyři typy čtyřúhelníků, které rozdělení podle rovnoběžnosti stran nepostihuje:

- **tětivový** - čtyřúhelník, jemuž lze opsat kružnici
- **tečnový** - čtyřúhelník, jemuž lze vepsat kružnici
- **dvoustředový** - lze mu opsat i vepsat kružnici
- **deltoid** ("drak") - úhlopříčky na sebe kolmé, jedna úhlopříčka (hlavní) půlí druhou (vedlejší). Každý deltoid je současně tečnový čtyřúhelník
- **Obvody a obsahy**

Obvod obecného čtyřúhelníku: $o = a + b + c + d$, kde a, b, c, d jsou strany trojúhelníku

Obsah obecného čtyřúhelníku: $S = \frac{1}{2}ef \sin \varphi$, kde e, f jsou délky úhlopříček a φ je (libovolný) úhel, který svírají.

ČTVEREC

$$o = 4a$$

$$S = a^2$$

$$S = \frac{u^2}{2} \text{ (u je úhlopříčka čtverce)}$$

OBDÉLNÍK

$$o = 2(a + b)$$

$$S = a \cdot b$$

KOSOČTVEREC

$$o = 4a$$

$$S = a \cdot v$$

$$S = \frac{e \cdot f}{2} \text{ (e, f jsou úhlopříčky kosočtverce)}$$

KOSODÉLNÍK

$$o = 2(a + b)$$

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b$$

LICHOBĚŽNÍK

$$o = a + b + c + d$$

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

Konstrukce obecného čtyřúhelníku

- zadán 5 prvků
- konstrukce 3 bodů (trojúhelník), pak nalezení 4. bodu

Konstrukce čtverce

- zadána 1 strana
- úhlopříčka, popř. poloměry kružnice opsané ($1/2 u$), vepsané ($1/2 a$)

Konstrukce obdélníku

- zadány 2 strany
- úhlopříčka a strana, úhlopříčka a úhel svírající úhlopříčky

Konstrukce rovnoběžníku

- zadány 2 strany a úhel (u kosočtverce stačí 1 strana a úhel)
- 2 strany a výška, popř. strana, výška, úhel
- úhlopříčky a úhel, který svírají; popř. strana, úhlopříčka, úhel/výška

Konstrukce lichoběžníku

- zadány např. 3 strany a úhel při základně
- strany a úhlopříčky – konstrukce trojúhelníku, pak 4. bod
- u pravoúhlého lich. nebo rovnoramenného lich.

B9a. Základní etapy vývoje matematiky jako vědy. Periodizace. Směry vývoje v současné matematice. Historická poznámka v matematice ZŠ.

Etapy vývoje matematiky

1. etapa vzniku matematiky do 6. st.př.n.l.

- počátky matematiky jsou spjaté už s životem pravěkých lidí
- tzv. praktická matematika (např. kolik má ovcí – každá ovce jeden kámen)
- nejstarší doklad na našem území je tzv. Věstonická vrubovka (kost vlka s 55 zářezy)
- k prvním počítáckým pomůckám patřily ruce a rozvíjí se tak desítková soustava. Po dlouhou dobu lidé pouze sčítali a odčítali. Později v souvislosti s měřením obsahů pozemků v zemědělství vzniklo násobení
- s rozvojem společnosti Egypta, Mezopotámie, Číny, Indie se rozvíjí i matematika (na egyptských papyrech se dochovaly náročné geometrické a aritmetické úlohy, z babylonských hliněných destiček lze vyčíst pozoruhodné znalosti o řešení kvadratických rovnic, užívání tabulek 2. a 3. mocnin pro výpočet objemů těles)
- každá kultura si vytvořila vlastní zápis čísel - vznikají jednotlivé numerační soustavy
- zapamatuj si: číselnou soustavou rozumíme soubor pravidel pro pojmenování a zapisování čísel, 3 nejznámější soustavy minulosti:
 - a. Egypt – k zápisu byly použity čárky, které seskupovali po deseti, je označována jako aditivní (adice = sčítání), neznali nulu, u násobení se výpočet dosáhl pomocí opakovaného sčítání např. násobení čísel 43×69 vypadalo takto: 1...69, 2...138, 4...276, 8...552, 16...1104, 32...2208
 - b. Sumerové a Babyloňané – vyjadřovali čísla klínovým písmem, je to první poziční soustava (lib. číslo můžeme zapsat pomocí 2 různých znaků, záleží na jejich pozici v zápisu)
 - c. Řím – římský způsob zapisování čísel se dosud využívá, je to nejznámější nepoziční soustava $I = 1$, $V = 5$, $X = 10$, $L = 50$, $C = 100$, $D = 500$ a $M = 1000$
- my používáme soustavu z Indie, která se do Evropy rozšířila pomocí Arabů
- vytváří se pojem číslo a obrazec, počátky aritmetiky a geometrie
- matematika jako věda zatím neexistuje

2. etapa 6. st.př.n.l. – 16. st.n.l.

- centrem je starověké Řecko „zlatá doba řecké matematiky“ kdy byly získány a utříděny poznatky, které tvoří ve velké míře dosavadní dosah současné školské mat.

- filozof **Pythagoras** založil školu, kde zkoumá geometrii (poučka o vlastnostech pravoúhlého trojúhelníku), objevil základní vlastnosti přirozených čísel a jejich vzájemné poměry, objevuje implikaci
- pythagorejské figurální čísla – trojúhelníková čísla (1, 3, 6, 10,...) nebo čtvercová čísla (1, 4, 9, 16, 25,...) ty znázorňují druhé mocniny přirozených čísel
- **Aristoteles** zakládá logiku
- **Euklides** zavádí axiomatickou metodu a deduktivní výstavbu, definoval základní pojmy geometrie jako např. Bod je to, co nemá části
- **Archimédes** vzorce pro výpočty objemů a povrchů těles + infinitezimální úvahy
- matematika se stává vědou o stálých veličinách a geometrických útvarech
- rozvoj algebry a její symboliky
- nové výsledky v oblasti trigonometrie, logaritmu a řešení rovnic 3. a 4. Stupně

3. etapa vyšší matematiky 17. – 19. st.

- 17. stol. zásadní zlom v matematice – rozvoj řady přirozených čísel, zavádí se dynamické prvky – **proměnná**
- **Descartes** objev analytické geometrie, **Newton**, **Leibnitz** zavedli pojem funkce, objev diferenciálního a integrálního počtu
- vznikají nová odvětví: diferenciální geometrie, variační počet
- změnil se způsob matematického myšlení

4. etapa současné matematiky 19. st. – současnost

- vznikají teorie, které nejsou modelem žádné známé situace v materiálním světě
- Cantor zakládá teorii množin, Lobačevskij vytvořil neeuklidovskou geometrii
- období změn, byly upřesněny základní pojmy analýzy, pojmy funkce, limita, integrál
- z analýzy se vydělily speciální oblasti: teorie funkcí reálné proměnné, konstruktivní teorie funkcí, funkce komplexní proměnné, teorie diferenciálních a integrálních rovnic
- vznikla teorie důkazů a rozvíjí se matematická logika
- vznik počítačů umožnil studium a řešení netradičních mat. úloh – vznik kybernetiky, která využívá teorii pravděpodobnosti a matematickou logiku
- dnes má matematika přes 800 disciplín

Periodizace podle Kolmogorova

1. tvorba elementárních matematických pojmů do 6. st. př.n.l.
2. matematika konstantních veličin 6. st. př.n.l. – 16. st. n.l.
3. matematika proměnných veličin 17. – 19. st.
4. matematika zobecněných kvantitativních a prostorových vztahů

Směry vývoje v současné matematice

Novou úlohu při výuce matematiky dostává experimentování, práce s učebnicí, pracovními sešity, cvičebnicemi, sbírkou úloh i práce s učebními pomůckami. Do učiva na ZŠ byly zařazeny základy statistiky a teorie pravděpodobnosti, posiluje se rozvoj funkčního myšlení.

V roce 1980 doporučila Národní rada dohlížitelů nad školní matematikou některé myšlenky pro vyučování matematice v 21. stol.

12 hlavních oblastí matematických dovedností pro 21. století

1. řešení úloh – problémů: aplikace dřívějších znalostí na nové neznámé situace, žáci by měli znát alternativní řešení úloh, problémů
2. sdělování matematických myšlenek: měli by se učit jazyk a symboliku mat., měli by být schopni prezentovat mat. myšlenky
3. matematické zdůvodňování: měli by samostatně provádět ověřování mat. myšlenek
4. aplikace matematiky na každodenní situace: měli by si všímat každodenních situací, převádět je do matematiky a umět je mat. zpracovat (grafy, tabulky, procenta)
5. hbitosti při získávání „rozumných výsledků“: rychlé řešení nebo hledání hypotéz
6. odhady: žáci by si měli osvojit jednoduché techniky pro odhadování
7. vhodné výpočetní dovednosti: zručnost při sčítání, odčítání, násobení, dělení,...
8. algebraické myšlení: měli by umět využívat proměnných k vyjadřování mat. kvantil a výrazů, prezentovat mat. funkce a vztahy pomocí tabulek a grafů
9. měření: pomocí konkrétní zkušenosti si osvojit zákl. pojmy měření
10. geometrie: měli by chápat geometrické pojmy nutné v 3-rozměrném světě
11. statistika: měli by umět shromažďovat a organizovat údaje, umět číst závěry z tabulek
12. pravděpodobnosti: měli by chápat zákl. symboliku pravděpodobnosti, aby mohli určovat pravděpodobnost budoucích událostí

Historická poznámka

Příležitost obohatit výuku a motivovat žáky pomocí poznámek z historie.

Náměty využití historie matematiky

- seznámení žáků s jinými (nedekadickými) číselnými soustavami
římské číslice, zápisy letopočtů a významných dat např. DÚ: zjistěte, jaké letopočty jsou zapsány římskými číslicemi na starých budovách v místě vašeho bydliště
ukázky zápisů čísel starověkých národů (egyptské hieroglyfy, klínové písmo národů Mezopotámie, ...)

praktické užívání pozůstatků „číselných soustav“ našich předků (pár = 2, tucet = 12, mandel = 15, kopa = 60, veletucet = 144)

převádění jednotek času: hodina – minuta – sekunda

seznámení s dvojkovou číselnou soustavou v souvislosti s poznatky o počítačích

- převádění jednotek délky, hmotnosti a objemu

Jednotky délky: český loket, palec, stopa, yard, anglická míle, námořní míle, versta,... jednotky obsahu: 1 jitro = 2, korce = 3, míry = 400,...

Základem starořeckých délkových měr bylo ječné zrn. 5 těchto zrn položených vedle sebe dávalo palec, 4 palce = prst, 10 prstů = píd', 3 pídě = pražský loket

- ukázky zajímavých počtářských praktik minulosti

počítání na ABAKU – první mechanická početní pomůcka ve starověkém Římě a Řecku, byla to dřevěná nebo hliněná tabulka s rovnoběžnými rýhami, do nichž se vkládaly kameny, rýhy představovaly jednotky, desítky, stovky a tisíce

násobení pomocí „duplace a mediace“ (zdvojování a půlení)

- slavné matematické úlohy a objevy minulosti

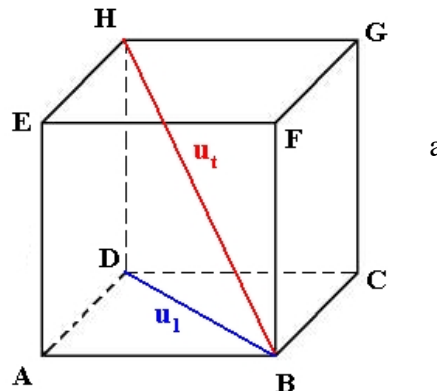
problém čtyř barev – je možné vybarvit libovolnou zeměpisnou mapu čtyřmi různými barvami tak, aby dva sousední státy nebyly vybarveny stejnou barvou?

úlohy zadané pokynem „nakresli jedním tahem“ a Eulerova úloha o 7 mostech v Královci

B9b. Základní tělesa (krychle, kvádr, hranol, válec, jehlan, kužel, koule). Jejich popis, vlastnosti, vzájemné vztahy a zobrazení ve školské praxi. Výpočet povrchu a objemu.

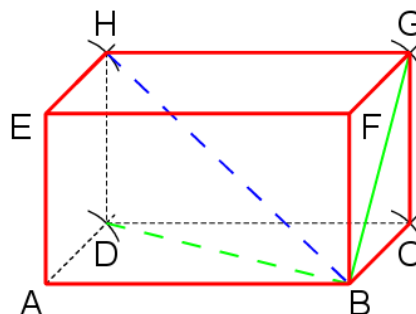
Krychle

- Krychle (**pravidelný šestistěn** nebo také hexaedr) je trojrozměrné těleso, jehož stěny tvoří šest stejných čtverců, (osm vrcholů a dvanáct hran).
- Krychle má 6 shodných stěn čtvercového tvaru, 8 vrcholů 12 hran stejné délky.
- Krychle je středově souměrná podle svého středu (tj. průsečíku tělesových úhlopříček).
- Krychle je osově souměrná podle 9 os:
 - tří spojnic středů protilehlých stěn
 - šesti spojnic středů protilehlých hran
- Krychle je rovinově souměrná podle devíti rovin:
 - tří rovin rovnoběžných se stěnami a procházejících středem krychle
 - šesti rovin určených dvojicí protilehlých hran
- Krychle je **speciálním případem kvádru** - patří tedy mezi **mnohostěny**.
- Díky shodnosti všech svých stěn i hran patří mezi takzvaná **platónská tělesa**. Každé dvě stěny krychle jsou rovnoběžné nebo kolmé.



Kvádr

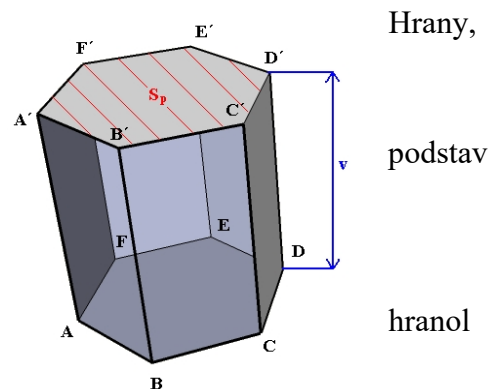
- Kvádr je trojrozměrné těleso – **rovnoběžnostěn**, jehož stěny tvoří šest pravoúhlých obdélníků.
- Má tři skupiny rovnoběžných hran shodné délky (v rámci skupiny). Tyto délky jsou obvykle označovány jako délka, šířka a výška kvádru.
- Kvádr má 6 stěn obdélníkového tvaru, z nichž dvě protilehlé jsou vždy shodné, 8 vrcholů a 12 hran, z nichž čtveřice rovnoběžných má vždy shodnou délku.
- Kvádr je **středově souměrný** podle průsečíku svých úhlopříček.
- Kvádr je **osově souměrný** podle tří os - spojnic středů protilehlých stěn.
- Kvádr je rovinově souměrný podle tří rovin. Každá z těchto rovin je rovnoběžná s některou ze stěn kvádru a prochází průsečíkem úhlopříček kvádru.
- Každé dvě stěny kvádru jsou rovnoběžné nebo kolmé. Každé dvě hrany kvádru jsou rovnoběžné nebo kolmé.



Hranol

- Hranol je mnohostěn, jehož dvě stěny leží v rovnoběžných rovinách. Tyto dvě stěny označujeme jako podstavy (podstavné stěny).
- Ostatní, tzv. boční stěny tvoří tzv. plášť hranolu.

- Strany podstavy hranolu nazýváme podstavnými hranami. které nejsou podstavnými nazýváme boční hrany.
- Podle počtu stran podstavy hovoříme o hranolu trojbokém, čtyřbokém, pětibokém atd. Vzdálenost obou se nazývá výškou hranolu.

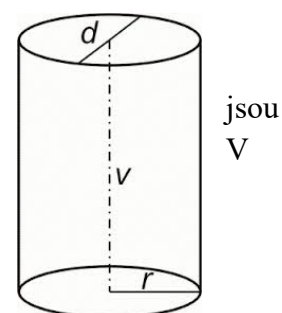


Rozdělení hranolů

- Jsou-li boční hrany kolmé k rovině podstavy, pak se označuje jako **kolmý**.
- Pokud hranol není kolmý, říkáme, že je **kosý**.
- Kolmý hranol, jehož podstavou je pravidelný mnohoúhelník, se nazývá pravidelný.
- Čtyřboký hranol, jehož podstavou je rovnoběžník, se nazývá **rovnoběžnostěnem**.
- Kolmý hranol, jehož podstavou je obdélník nebo čtverec se označuje jako **kvádr**.
- Kolmý hranol, jehož všechny stěny jsou čtverce, se nazývá **krychlí** (hexaedrem). Krychle je speciálním případem kvádra.

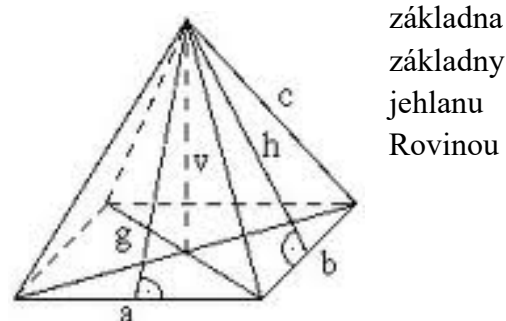
Válec

- Válec je v prostorové geometrii těleso, vymezené dvěma rovnoběžnými podstavami a pláštěm.
- Plášť je rozvinutelná plocha, všechny povrchové (tvořící) přímky pláště rovnoběžné a pokud jsou k podstavám kolmé, hovoříme o **kolmém** válci. opačném případě se jedná o válec **kosý**.
- Vzdálenost mezi podstavami se nazývá **výška** válce. Vzdálenost mezi dvěma podstavami podél pláště (tj. podél povrchové přímky) se nazývá **strana** válce.
- Je-li podstavou kruh, pak válec označíme jako **kruhový**.
- Kolmý kruhový válec nazýváme **rotačním válcem**. Přímku procházející středy obou podstav rotačního válce nazýváme osou rotace.



Jehlan

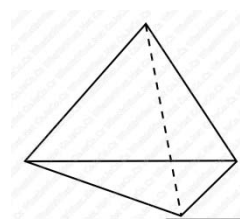
- Jehlan je trojrozměrné těleso. Jeho základnu (nebo také podstavu) tvoří mnohoúhelník. Vrcholy základny jsou spojeny s jedním bodem mimo rovinu základny - tento bod se obvykle nazývá **vrchol jehlanu**.
- Kolmá vzdálenost vrcholu od roviny podstavy se nazývá **výška jehlanu**.
- Jehlan nemůže nikdy být středově souměrný.
- Jehlan je osově souměrný pouze tehdy, je-li základna středově souměrná a průměr vrcholu jehlanu do roviny základny je shodný se středem souměrnosti základny (laičtěji: vrchol jehlanu musí ležet „kolmo nad středem souměrnosti základny“.). Osou souměrnosti je v takovém případě spojnice vrcholu se středem souměrnosti základny.
- Jehlan může být rovinově souměrný pouze tehdy, je-li osově souměrná a průmět vrcholu jehlanu do roviny leží na ose souměrnosti základny. (Lidštěji: vrchol musí ležet „kolmo nad osou souměrnosti základny“.)



souměrnosti je v takovém případě rovina určená osou souměrnosti základny a vrcholem jehlanu.

Speciální případy

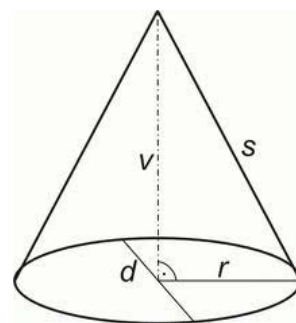
- **Pravidelný čtyřstěn** je jehlan, jehož základnu i všechny tři stěny jsou **rovnoběžné trojúhelníky**. Tento čtyřstěn má tvar všech stěn i délku všech hran - jedná se tedy o jedno z platónských těles.
- Pokud má jehlan čtvercovou základnu a vrchol kolmo nad průsečíkem úhlopříček základny, hovoříme o **pravidelném čtyřbokém jehlanu**.



boční
stejný

Kužel

- Kužel je oblé těleso, které získáme jako průnik kuželového prostoru a rovinné vrstvy.
- Část kuželové plochy, která tvoří povrch kužele je označována jako **plášť** kužele.
- Řez kuželového prostoru hraniční rovinou vrstvy se nazývá **podstava**. Plášť kužele a podstavu nazýváme společným názvem **povrch** kužele.
- Bod, ve kterém se rovinný řez kužele redukuje na bod, se označuje jako **vrchol** kužele. Kolmou vzdálenost mezi podstavou a vrcholem nazýváme **výškou** kužele. Vzdálenost mezi vrcholem a podstavou podél pláště nazýváme **stranou** kužele.
- Je-li podstavou kužele kruh, pak jej označíme jako **kruhový**. Kolmice spuštěná z vrcholu na rovinu podstavy prochází podstavou kruhového kužele, pak kužel označujeme jako **kužel** nebo kolmý kruhový kužel.
- Pokud kruhový kužel není kolmý, pak jej označujeme jako **kosý**.



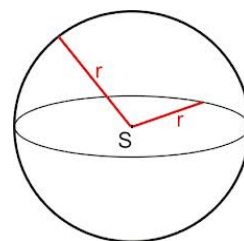
Pokud
středem
rotační
kosý.

Rotační kužel

- je rotační těleso vzniklé otáčením pravoúhlého trojúhelníku v prostoru okolo jedné z odvěsen.
- Kužel není středově souměrný.
- Kužel je osově souměrný podle spojnice vrcholu kužele se středem podstavy.
- Kužel je rovinově souměrný podle nekonečně mnoha rovin - rovinou souměrnosti je každá rovina, která v sobě obsahuje jeho osu (tj. vrchol a střed podstavy).

Koule

- Koule je prostorové těleso tvořené množinou všech bodů (trojrozměrného euklidovského) prostoru, jejichž vzdálenost od zadaného bodu (středu) je nejvýše rovna zadanému poloměru.
- Body, jejichž vzdálenost je právě rovna poloměru, tvoří povrch tzv. **kulovou plochu** (také označovanou jako sféru nebo sférickou
- Koule je velmi symetrická: středově (podle středu), osově a podle libovolné přímky, resp. roviny procházející středem.
- Mezi plochami uzavírajícími daný objem má kulová plocha obsah a naopak, mezi plochami s daným obsahem uzavírá kulová největší objem. Proto se koule často vyskytuje v přírodě, např. ve formě kapek a bublin, jejichž povrch je minimalizován povrchovým napětím.

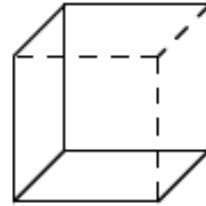
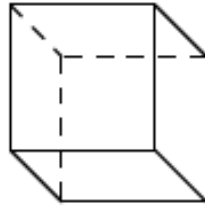
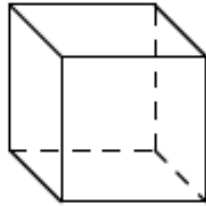
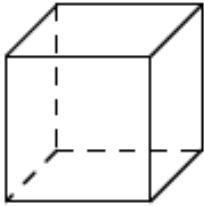


koule,
plochu).
rovinově
nejmenší
plocha

- Koule je **rotační těleso**, může vzniknout otáčením kruhu podle osy; pokud by se místo kruhu otáčela elipsa, vznikl by rotační elipsoid.
- Válec opsaný kouli má povrch i objem rovný $3/2$ povrchu, resp. objemu koule.

Zobrazování těles v rovině

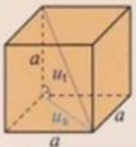
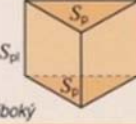
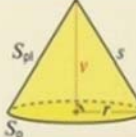
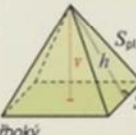
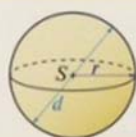
Volné rovnoběžné promítání je typem kosoúhlého promítání na pevně zvolenou svislou rovinu, ve kterém nejsou znázorněny souřadnicové osy.



Jedná se o:

- pravý nadhled (viditelné jsou: pravá, horní a přední stěna)
- levý nadhled (viditelné jsou: levá, horní a přední stěna)
- pravý podhled (viditelné jsou: pravá, dolní a přední stěna)
- levý podhled (viditelné jsou: levá, dolní a přední stěna)

Výpočet povrchu a objemu

	KRYCHLE - povrch: $S = 6a^2$ - objem: $V = a^3$ - délka stěnové úhlopříčky: $u_2 = a \cdot \sqrt{2}$ - délka tělesové úhlopříčky: $u_1 = a \cdot \sqrt{3}$	KVÁDR - povrch: $S = 2 \cdot (ab + bc + ac)$ - objem: $V = a \cdot b \cdot c$ - stěnová úhlopříčka: $u_{21} = \sqrt{a^2 + b^2}$ - tělesová úhlopříčka: $u_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
	KOLMÝ HRANOL - povrch: $S = 2S_p + S_{pt}$ - obsah pláště: $S_{pt} = o \cdot v$ - objem: $V = S_p \cdot v$ ✓ o = obvod podstavy	ROTAČNÍ VÁLEC - povrch: $S = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot v = 2\pi r(r + v)$ - obsah pláště: $S_{pt} = 2\pi \cdot r \cdot v$ - objem: $V = \pi \cdot r^2 \cdot v$ - poloměr: $r = \frac{d}{2}$
	ROTAČNÍ KUŽEL - povrch: $S = S_p + S_{pt}$ $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s = \pi \cdot r \cdot (r + s)$ - obsah pláště: $S_{pt} = \pi \cdot r \cdot s$ - délka strany pláště: $s = \sqrt{r^2 + v^2}$ - objem: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot v$	KOMOLÝ ROTAČNÍ KUŽEL - povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pt}$ $S = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot \rho^2 + \pi \cdot (r + \rho) \cdot s$ - obsah pláště: $S_{pt} = \pi \cdot (r + \rho) \cdot s$ - délka strany pláště: $s = \sqrt{(r - \rho)^2 + v^2}$ - objem: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot v \cdot (r^2 + r\rho + \rho^2)$
	KOLMÝ JEHLAN - povrch: $S = S_p + S_{pt}$ - obsah pláště: $S_{pt} = \frac{1}{2} o \cdot h$ - objem: $V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$ ✓ pravidelný čtyřboký jehlan: podstava $\square$ ✓ pravidelný čtyřstěn: stěny i podstavu tvoří rovnostranné $\triangle$	KOMOLÝ JEHLAN - povrch: $S = S_1 + S_2 + S_{pt}$ - obsah pláště: $S_{pt} = \frac{1}{2} (o_1 + o_2) \cdot h$ - objem: $V = \frac{1}{3} v \cdot (S_1 + \sqrt{S_1 \cdot S_2} + S_2)$ ✓ o_1, o_2 = obvody podstav
	KOULE - povrch: $S = 4\pi \cdot r^2$ $S = \pi \cdot d^2$ - objem: $V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$ $V = \frac{1}{6} \pi \cdot d^3$	KULOVÁ VÝSEČ - povrch: $S = 2\pi r v + \pi r \rho$ - objem: $V = \frac{2}{3} \pi \cdot r^2 v$ - poloměr příslušné kulové úseče: $\rho = \sqrt{v \cdot (2r - v)}$

Příklady na výpočet

1) Kolik litrů vody je v nádobě tvaru kvádrů o výšce 12cm, je-li délka třikrát větší než šířka a výška je rovna polovině délky kvádrů.

Zadání

$$c = 12 \text{ cm}$$

$$12 = \frac{1}{2} a$$

$$V = abc$$

$$a = 3 \cdot b$$

$$a = 24$$

$$V = 24 \cdot 8 \cdot 12 = 2304 \text{ cm}^3 = 2,3 \text{ l}$$

$$c = \frac{1}{2} a$$

$$24 = 3b$$

$$b = 8$$

B10a. Matematické vzdělávání talentovaných a handicapovaných dětí. Péče o matematické talenty, matematické soutěže. Neprospěch v matematice. Poruchy učení a poruchy matematických schopností.

Žák s nadáním pro matematiku

- při charakteristice nadaného (talentovaného) žáka bývají rozlišovány dva druhy schopností:
 - školní nadání – schopnost přijmout, analyzovat a reprodukovat informace
 - tvořivá produktivita – schopnost vytvářet nové informace; tvořivostí bývá označována produkce nových a hodnotných nápadů a řešení
- nadprůměrné schopnosti jako podmínka úspěšného učení a uplatňování matematiky bývají u nadaných žáků doprovázeny také odpovídajícím učebním nasazením
- právě různý a obtížně měřitelný podíl nadání a učebního nasazení na školní úspěšnosti žáka v matematice způsobuje obtížnější identifikaci skutečného nadání (talentu)
- uplatnění a další rozvoj nadaného žáka v matematice vyžaduje zvýšit podíl tvořivých činností a heuristických (objevitelských) postupů v matematickém vyučování (např. vhodně koncipovaný systém matematických učebních úloh)
 - řešení úloh vyšší kognitivní náročnosti, vyžadující složitější myšlenkové operace s matematickými poznatky (transformace, interpretace a zdůvodnění, indukce, dedukce, verifikace a dokazování) a vyžadující tvořivé myšlení (řešení problémových situací, kladení otázek a formulace úloh žáky, objevování na základě vlastního pozorování a vlastních úvah žáka)
 - to má umožnit, aby nadaní žáci
 - a) mohli pracovat pokud možno samostatně, a aby řešením úloh ve vhodných případech i sami objevovali matematické poznatky, pro něho nové
 - b) se učili interpretovat a hodnotit výsledky a aplikovat je na jiné problémové oblasti

Péče o matematické talenty v ČR

- na víceletých gymnáziích
- ve specializovaných třídách na ZŠ – od roku 1980 vnikaly také třídy s rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů a od roku 2001 třídy s rozšířenou výukou informatiky
- v rámci vnitřní diferenciaci v normálních třídách
- volbou volitelných a nepovinných předmětů
- kroužků v Domovech dětí a mládeže

V ČR jsou jen pouhá 4 gymnázia s rozšířenou výukou matematiky – Bílovec, Brno

Předností tříd víceletého gymnázia resp. tříd RVM je v práci s talentovanou mládeží, nebo s žáky, kteří mají zájem o matematiku:

- je možné se jim více věnovat
- učivo probírat do větší hloubky
- dát větší prostor nápadům a řešením žáků
- nalézat optimální řešení, zobecňovat poznatky
- více využívat mezipředmětových vztahů
- učit obory, které nejsou dány osnovami

Jedná se především o úlohy, které prohlubují **logické myšlení** (číselné soustavy, luštění ZEBER a algebrografů, základy kombinatoriky, složitější slovní úlohy), rozšiřují **prostorovou představivost** (anaglyfy, prostorové obrázky), **abstraktní myšlení** (odvozování vztahů bez modelů, obrázků, pomůcek aj. zapojením svých kombinačních schopností) a **rozvoj fantazie** (sestavování příkladů, psaní matematických příkladů, sestavování vlastních ZEBER aj.).

Další částí je vedení žáků k řešení příkladů matematických soutěží a olympiád. Tady je důležité, aby učitel žáky do soutěží nenutil, ale aby je vhodně motivoval. Při vlastním řešení je musí učitel vést, sledovat jejich pokroky, popř. jim poradit a povzbudit. Pokud žák splní podmínky soutěže, mě by postoupit do okresního resp. krajského kola. Ale tady je třeba uvážit, v jaké psychické pohodě se žák nachází a vzít do úvahy, co by se žákem udělal větší neúspěch v soutěži, zda by ho nemotivoval pro další ročníky. Proto práce a sledování těchto žáků je tak důležitá.

Pythagoriáda

- vznikla na Slovensku, kdy ještě neexistoval klokan a udržuje se dodnes
- je pro žáky 6. a 7. ročníků – žáci řeší 15 příkladů, za správné řešení získávají 1 bod a při zisku 11 a více bodů je úspěšným řešitelem
- probíhá dvoukolově – v únoru na škole a pro úspěšné řešitele pak v květnu v okrese
- obtížnost je někde mezi matematickou olympiádou a klokanem.

Matematická olympiáda

- nejstarší a nejznámější
- jde o prestižní soutěž, díky ní se každý rok objeví mnoho matematických talentů
- je organizována v několika věkových kategoriích označených od té nejvyšší a nejprestižnější A, přes B až po Z5
- nejdříve probíhá domácí kolo, kde je 6 úkolů, kdy stačí vyřešit 4 pro postup do dalšího kola
- kategorie Z – v prvním kole žáci řeší 6 náročných příkladů, pokud všechny odevzdá a 4 vyřeší správně, postupuje do II. (okresního) kola, kde řeší 4 bodové příklady.

- získá-li alespoň polovinu bodů, je úspěšným řešitelem a postupuje do III. (krajského) kola
- je určena pro talentované žáky od 4. ročníku po 9. ročník. Krajské kolo má pouze MO9.

Matematický Klokán

- poprvé zorganizovala v roce 1991 skupina francouzských matematiků, symbolem byl australský klokán (protože počátky této soutěže jsou spojeny s Australanem Peterem O'Halloranem – jeho záměrem nebylo vytvořit novou soutěž pro nejtalentovanější matematiky, ale získávat pro matematiku „normální“ žáky, dokázat jim, že matematika nemusí být vždy nudný, nezábavný a obávaný předmět; chtěl dětem poskytnout radost ze soutěžení při řešení netradičních úloh, kterých není v učebnicích dostatek, a možnost porovnání vlastních schopností se stejně starými kamarády ve třídě, škole, okrese, regionu či v celostátním měřítku)
- v ČR byl poprvé Matematický klokán uspořádán v roce 1995 v pěti kategoriích (**Klokánek** – 4. a 5. tř. ZŠ, **Benjamin** – 6. a 7. tř. ZŠ, **Kadet** – 8. a 9. tř. ZŠ, **Junior** – 1. a 2. roč. SŠ, **Student** – 3. a 4. roč. SŠ)
- pořadatelem Klokana v ČR je **JČMF** ve spolupráci s **Katedrou matematiky PdF UP a Katedrou algebry a geometrie PřF UP v Olomouci**
- ve všech školách ve druhé polovině března, ve stejný den a hodinu
- 24 úloh (8 krát za 3, 4 a 5 bodů), 60 minut

Neprospěch v matematice. Poruchy učení a poruchy matematických schopností.

Žák se zdravotním handicapem nebo mentálním postižením

- tito žáci získávají primární matematické vzdělání ve speciálních školách
- cílem matematického vzdělávání je poskytovat žákům takové matematické vědomosti a dovednosti, které jim umožní řešit základní problémy a úkoly, s nimiž se budou setkávat v praktickém životě a v pracovním procesu
- kromě nesporné **užitečnosti matematických poznatků pro reálný život** žáka (řešení jednoduchých úlohových situací z oblasti finanční matematiky – nákupy, slevy, spoření, procenta, práce s kalkulátorem, řešení geometrických úloh s praktickými náměty – měření, výpočty obvodů, obsahů...) je ovšem významný i **podíl matematiky na rozvoji osobnosti žáka**
- matematické vyučování může svým dílem (při plném zohlednění mentální úrovně včetně případných poruch matematických schopností, sociálního prostředí a celkového klimatu, v němž probíhá jeho kognitivní vývoj) mimo jiné:
 - o přispívat k rozvoji řeči dítěte aktivním používáním základních termínů matematického jazyka (čísla, početní výkony, relace, geometrické termíny)
 - o podílet se na formování jeho hodnotové orientace (sebekontrola při řešení úloh, prvky kooperace a soutěživosti)

- umožňovat horizontální, mezipředmětovou propojenost osvojených matematických poznatků s učivem předmětů přírodovědného charakteru (kontextová stránka slovních úloh) a pracovního vyučování (aplikace měření, rýsování)

Žák v matematice neúspěšný

- pozornost ve škole by měla být věnována nejen žákům nadaným, ale i žákům z druhého pólu – žáci v matematice neúspěšní. Jednu z možných podob hledání příčin školního neúspěchu v matematice lze spatřovat v *diagnostice poruch učení* (matematických schopností).
- Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování a počítání. Tyto poruchy mají individuální charakter, mohou se vyskytovat souběžně s jinými formami postižení.

Dyskalkulie

Pod pojmem dyskalkulie je označována specifická porucha matematických schopností. Dítě podává v matematice podstatně horší výkony, než by se daly vzhledem k jeho inteligenci očekávat. To znamená, že např. při testování pomocí testů inteligence a testů matematických schopností dítě dosahuje v matematickém testu podstatně horší výsledek než je výsledek intelligenčního testu.

Nejznámější *klasifikace* dyskalkulie je podle základních problémů, které se u dětí vyskytují v souvislosti s vývojem a budováním matematických pojmů a vztahů a se čtením a psaním matematických výrazů:

1) Praktognostická dyskalkulie

- porucha manipulace s konkrétními předměty nebo symboly – manipulace s kostkami, číslicemi, operačními znaménky, ...
- porucha při tvoření skupin nebo řady předmětů
- nepochopení pojmů přirozeného čísla
- neschopnost porovnat počet prvků
- neschopnost diferenciací geometrických útvarů
- v geometrii – obtíže se členěním předmětů podle barvy, tvaru, velikosti
- porucha prostorové orientace – špatně píše číslice, kreslení obrazců v geometrii vyžaduje správné umístění v prostoru, ...
- projevy tohoto typu dyskalkulie zasahují ty matematické dovednosti dítěte, které předcházejí počítání s čísly

2) Verbální dyskalkulie

- problémy se slovním označováním množství a počty předmětů, operačních znaků a matematických úkonů obecně

- neschopnost vyjmenovat číselnou řadu v určitém uspořádání (např. vzestupně, sestupně, ...) ale i ob jedno – vynechávání čísel, vrácení se, jejich opakování,...
- nepochopení vysloveného čísla (nejtěžší formy)
- nechápe slovní označení např. „o 4 více“, „4 krát více“, ...
- nepochopení slovního vyjádření matematických symbolů a znaků
- této dyskalkulii hovoříme jen tehdy, když má dítě nápadné a přetrvávající těžkosti se slovním označováním jevů v matematice, bez ohledu na to, zda totéž dokáže či nedokáže provést ve formě písemné.

3) Lexická dyskalkulie

- neschopnost číst matematické symboly (čísllice, čísla, znaky pro porovnávání, znaky operací) a napsané matematické příklady
- záměna tvarově podobných číslic 36-63, 6-9 a opačně
- porucha orientace v prostoru
- porucha P-L orientace
- záměny, přesmyčky čísel (čísllic v číslech) při jejich čtení nebo psaní, např. č 1010 napíše jako 100010
- nejasnosti s pochopením významu poziční hodnoty číslic v čísle, tedy jednotek, desítek, apod.

4) Grafická dyskalkulie

- neschopnost psát matematické symboly (čísllice, čísla, znaky, ...)
- neschopnost kreslit geometrické tvary apod. (nejde zde však o poruchu hrubé motoriky, ...)
- porucha při zápisu víceciferných čísel
- inverzní (obrácený) zápis čísel: 6-9, 17-71
- vynechávání číslic (zejména nul)
- neschopnost psát čísla podle diktátu
- neschopnost zápisu čísel pod sebou (čísllice téhož řádu)
- psaní nepřiměřeně velkých neúhledných číslic při značně nepřehledném, neuspořádaném zapisování početních operací (např. písemné dělení a násobení)
- problémy při rýsování obrazců a překreslování z tabule
- porucha P-L orientace
- porucha prostorové orientace

5) Operační dyskalkulie

- narušená schopnost provádět matematické operace s přirozenými čísly (ale i s dalšími čísly)
- záměna jednotlivých operací
- nahrazování jednoduchými operacemi +, - složitější operace $\cdot$, $:$
- poruchy při osvojování si pamětních spojů

- neschopnost respektovat prioritu při provádění více operací různé parity
- problémy při písemných algoritmech jednotlivých operací

6) Ideognostická dyskalkulie

- porucha v oblasti pojmové činnosti – nechápou, že č. 9 zle rozdělit na $3 \cdot 3$, nebo $10-1$,...
- porucha chápání matematických pojmů a vztahů mezi nimi
- porucha při zobecňování
- problémy při řešení slovních úloh – obtíže s pochopením principu úlohy
- neschopnost pochopit a převést slovně vyjádřené vztahy mezi množstvím do početních operací

V případě, kdy je efekt mírný, dílčí, částečné dopomoci ze strany učitele účinný, zřetelný, lze důvodně uvažovat nikoliv o vývojové poruše učení, ale spíše o některé formě kalkulastenie.

Pokud ovšem ani přes výraznou pomoc není dítě s to v řešení přiměřeně postoupit, pak můžeme uvažovat buď o celkové retardaci schopností, nebo o vývojové poruše učení.

Vývojová dyskalkulie se poměrně často kombinuje s vývojovou dysortografií (porucha pravopisu) a je-li navíc takové dítě pomalého osobního tempa, jsou jeho specifické nedostatky tak zvýrazněny, že se v hlavních školních předmětech projevuje až jako dítě bez potřebných všeobecných rozumových předpokladů.

B10b. Podobnosti geometrických útvarů, věty o podobnosti trojúhelníků, redukční úhel, změna a rozdělení v daném poměru. Užití podobnosti při odvození goniometrických funkcí ostrého úhlu na ZŠ.

Užití při řešení úloh typu: *Změňte libovolný čtyřúhelník ABCD v poměru 3:2 (použijte redukční úhel.)*

Podobnost

Podobné zobrazení nebo také podobnost je geometrické zobrazení v rovině, pro které existuje kladné číslo k tak, že pro každé dvě dvojice bodů A, A' a B, B' vzoru a obrazu je splněn vztah $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$. Číslo k se nazývá koeficient podobnosti.

V každém podobném zobrazení platí:

- Obrazem přímky AB je přímka $A'B'$, obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky.
- Obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$, obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky.
- Obrazem poloroviny p_A je polorovina $p_{A'}$, obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny.
- Obrazem úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB .

Podobnost značíme znakem $\sim$

Útvary jsou podobné, mají-li:

- délky příslušných stran ve stejném poměru (označujeme nejčastěji k – *poměr podobnosti*)
- velikosti příslušných úhlů shodné.

Je-li: $k > 1$ jedná se o zvětšení
 $k < 1$ jedná se o zmenšení
 $k = 1$ jedná se o shodnost

Složením dvou podobností s koeficienty podobnosti k_1, k_2 vznikne podobnost s koeficienty podobnosti $k_1 \cdot k_2$.

Inverzní zobrazení k podobnosti s koeficientem podobnosti k je podobnost s koeficientem podobnosti $\frac{1}{k}$.

Složením stejnolehlosti a libovolné shodnosti vzniká podobnost, a naopak podobnost lze rozložit ve stejnolehlost a shodnost.

**Každé podobné zobrazení se dá získat složením shodných zobrazení a tzv. stejnolehlostí.*

Poznámka:

Stejnolehlost je: je dán bod S a reálné číslo χ . Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem χ je zobrazení $H(S, \chi)$, které přiřazuje

- 1) každému bodu $S \neq H$ bod X' tak, že platí $|SX'| = |\chi| \cdot |SX|$, přitom pro $\chi > 0$ leží bod X' na polopřímce SX , pro $\chi < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné.
- 2) bodu S bod S'

Pro stejnolehlost platí:

- přímka a její obraz ve stejnolehlosti jsou rovnoběžné
- úsečka a její obraz ve stejnolehlosti jsou rovnoběžné. Jsou souhlasně orientovány ve stejnolehlosti s kladným koeficientem a opačně orientovány ve stejnolehlosti se záporným koeficientem.
- Poměr délek obrazu úsečky a jejího vzoru se rovná absolutní hodnotě koeficientu stejnolehlosti.
- Obrazem úhlu je úhel shodný

Jediným samodružným bodem je střed stejnolehlosti. Samodružné přímky jsou přímky, které prochází středem stejnolehlosti.

Z definice plyne, že stejnolehlost je dána středem a koeficientem. Může však být dána středem a dvojicí bodů.

Stejnolehlost kružnic

Jsou-li dány dvě libovolné kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ s různými poloměry, existují právě dvě stejnolehlosti zobrazující kružnici k_1 na kružnici k_2 . Středů obou stejnolehlostí a středy obou kružnic leží na téže přímce. Jejich koeficienty jsou čísla $\frac{r_2}{r_1}$ a $\frac{-r_2}{r_1}$.

Mají-li dvě kružnice o různých poloměrech společné tečny, prochází každá z nich vnějším nebo vnitřním středem stejnolehlosti těchto kružnic.

Každá přímka, která prochází středem stejnolehlosti dvou kružnic a je tečnou jedné této kružnice je tečnou i kružnice druhé.

Podobnost trojúhelníku

Trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC , právě když existuje kladné číslo k tak, že pro jejich strany platí:

$$|A'B'| = k \cdot |AB|$$

$$|B'C'| = k \cdot |BC|$$

$$|C'A'| = k \cdot |CA|$$

neboli $c' = k \cdot c$, $a' = k \cdot a$, $b' = k \cdot b$

Podobnost trojúhelníků ABC , $A'B'C'$ zapisujeme $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$

Dva trojúhelníky jsou podobné, právě když poměr délek každých dvou stran jednoho trojúhelníku se rovná poměru délek druhého trojúhelníku.

Podobnost trojúhelníků je vztah tranzitivní. Je-li trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC (s koeficientem podobnosti k) a trojúhelník $A''B''C''$ podobný trojúhelníku $A'B'C'$

(s koeficientem podobnosti l), je také trojúhelník $A''B''C''$ podobný trojúhelníku ABC

(s koeficientem $k \cdot l$)

Věty o podobnosti trojúhelníků

- 1) trojúhelníky jsou podobné podle **věty sss**, mají-li délky všech tří příslušných stran trojúhelníků ve stejném poměru. (shodují se poměry odpovídajících stran)
- 2) trojúhelníky jsou podobné podle **věty sus**, mají-li délky dvou příslušných stran ve stejném poměru a úhel jimi sevřený shodný. (shodují se poměry 2 stran a úhel jimi sevřený)
- 3) Trojúhelníky jsou podobné podle **věty usu**, mají-li dva úhly shodné (strany si všímat nemusíme), proto se také tato věta nazývá **uu**.

Redukční úhel používám při zvětšování nebo zmenšování délek v daném poměru. Zmenšovat lze kdykoliv, zvětšovat jen do $k \leq 2$.

Při zvětšování nebo zmenšování technického výkresu v daném poměru $a : b$ ($a > b$) využíváme tzv. **redukční úhel**.

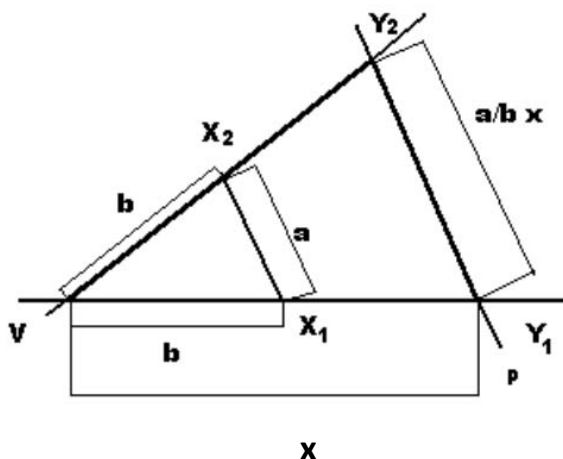
Příklad:

Je dána úsečka AB délky x cm. Máme ji zvětšit v poměru $a : b$.

Řešení:

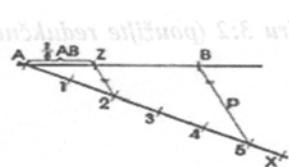
Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník VX_1X_2 , kde $VX_1 = VX_2 = b$ cm, $X_1X_2 = a$ cm. Prodloužíme polopřímku VX_1 a nanese na ni velikost x – získáme úsečku VY_1 . Prodloužíme polopřímku VX_2 . Bodem Y_1 vedeme rovnoběžku s úsečkou X_1X_2 . Bod Y_2 je průsečíkem polopřímky VX_2 a této rovnoběžky.

Hledanou úsečkou je Y_1Y_2 .



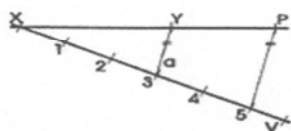
Změna a rozdělení v daném poměru

Příklad: Zmenšete danou úsečku AB v poměru 2 : 5 (nebo $\frac{2}{5}$).



- Konstrukce:**
- 1) AB; $\angle BAX$ je libovolný, nejvhodnější velikost úhlu je asi 40° až 50°
 - 2) na polopřímku AX nanese kružítkem 5 shodných dílů
 - 3) bod č.5 spojíme s B, vznikne úsečka p
 - 4) v bodě č.2 vedeme rovnoběžku s p
 - 5) Vznikne Z; $|AZ| = \frac{2}{5} |AB|$

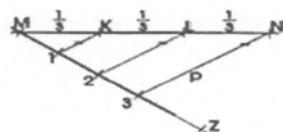
Příklad: Zvětšete úsečku XY=3 cm v poměru 5 : 3.



- Konstrukce:**
- 1) XY; $|XY| = 3 \text{ cm}$
 - 2) $X \rightarrow XV$
 - 3) na $X \rightarrow XV$ nanese kružítkem 5 shodných dílů
 - 4) bod č.3 spojíme s Y, vznikne úsečka a
 - 5) v bodě č.5 vedeme rovnoběžku s a
 - 6) Vznikne bod P; $|XP| = \frac{5}{3} |XY|$

Rozdělení úsečky na libovolný počet shodných dílů.

Příklad: Rozdělte úsečku MN na 3 shodné díly.



- Konstrukce:**
- 1) MN
 - 2) $M \rightarrow MZ$
 - 3) na $M \rightarrow MZ$ nanese kružítkem 3 shodné díly
 - 4) bod č.3 spojíme s N= p
 - 5) v bodech č.1 a č.2 vedeme rovnoběžky s p
 - 6) Vzniknou body K, L
 - 7) $|MK| = |KL| = |LN| = \frac{1}{3} |MN|$

Užití podobnosti při odvození goniometrických funkcí ostrého úhlu

Pomocí Pythagorovy věty lze ze známých délek dvou stran pravoúhlého trojúhelníku určit délku třetí strany. Podobnost využijeme při vztazích mezi délkami stran pravoúhlého trojúhelníku a velikostmi jeho ostrých úhlů.

Máme pravoúhlý trojúhelník ABC, se stranami a, b, c.

Odvěsna **a** leží „proti“ úhlu α se nazývá **odvěsna protilehlá k úhlu α** .

odvěsna **b** „přiléhající“ k úhlu α se nazývá **odvěsna přilehlá k úhlu α** .

Sinus – je poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α k délce přepony – $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Tangens – poměr délky odvěsny protilehlé k úhlu α k délce odvěsny přilehlé k úhlu α $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

Kosinus – poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α k délce přepony – $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Kotangens – poměr délky odvěsny přilehlé k úhlu α k délce odvěsny protilehlé k úhlu α – $\cot \alpha = \frac{b}{a}$

Tangens a kotangens stejného úhlu jsou navzájem převrácené hodnoty zlomku.

Hodnota $\sin$ ostrého úhlu $\alpha \dots 0 \leq \sin \alpha \leq 1$

Hodnota $\cos$ ostrého úhlu $\alpha \dots 1 \geq \cos \alpha \geq 0$

Hodnota $\tan$ ostrého úhlu $\alpha \dots 0 \leq \tan \alpha \dots \infty$ (do nekonečna)

Užití při řešení úloh typu: Změňte libovolný čtyřúhelník ABCD v poměru 3:2 (použijte redukční úhel).

Podobnost trojúhelníků

Věty o podobnosti trojúhelníků

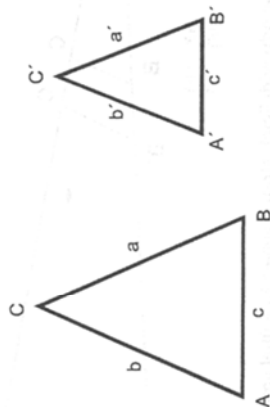
Dva trojúhelníky jsou podobné:

- shodují-li se poměry odpovídajících si stran (věta sss)
- shodují-li se ve dvou úhlech (věta uu)
- jsou-li rovny poměry dvou stran a shodné úhly jimi sevřené (věta sus)
- jsou-li rovny poměry dvou stran a shodné úhly proti větším z nich (věta Ssu)

Věty vyplývající z podobnosti trojúhelníků

1. Dva trojúhelníky jsou podobné, jsou-li jejich odpovídající si strany rovnoběžné, nebo navzájem kolmé.
2. Dva pravoúhlé trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v jednom ostrém úhlu nebo v poměru dvou odpovídajících si stran.
3. Dva rovnoramenné trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se v úhlu při základně nebo v úhlu při vrcholu.
4. Každé dva rovnoramenné trojúhelníky jsou si podobné.

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ PODLE VĚTY SSS



Jestliže jsou poměry všech sobě odpovídajících stran trojúhelníků shodné, pak jsou tyto trojúhelníky podobné.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$$

Zápis:

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Konstanta k je poměr podobnosti

Čteme: trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku A'B'C'

Příklad:

Je dán ΔABC : $a = 28,2$ cm; $b = 25,3$ cm; $c = 48,4$ cm. Určete obvod podobného trojúhelníka XYZ, je-li poměr podobnosti 0,01.

Změní-li se strany 0,01 krát, změní se i obvod ΔXYZ 0,01 krát.
 $o = 0,01 \cdot (28,2 + 25,3 + 48,4) = 1,019$ cm = **1 cm**

Příklad:

Určete, zda je ΔABC podobný ΔKLM . ΔABC : $a = 6,2$ cm; $b = 7,3$ cm; $c = 8,4$ cm.
 ΔKLM : $|KL| = 812,2$ m; $|LM| = 956,3$ m; $|KM| = 1100,4$ m.

$$\frac{|KL|}{a} = \frac{812,2}{6,2} = 131$$

$$\frac{|LM|}{b} = \frac{956,3}{7,3} = 131$$

$$\frac{|KM|}{c} = \frac{1100,4}{8,4} = 131$$

Protože poměry sobě odpovídajících stran jsou shodné, jsou oba trojúhelníky podobné. $\Delta ABC \sim \Delta KLM$.

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ PODLE VĚTY SUS C"



Jestliže jsou poměry dvou sobě odpovídajících stran trojúhelníků a úhel jimi sevřený shodný, pak jsou tyto trojúhelníky podobné.

Příklad: Je dán $\triangle ABC$: $b = 15,2$ cm; $c = 28,4$ cm; $\alpha = 38^\circ 15'$ a $\triangle A'B'C'$: $b' = 30,4$ cm; $c' = 56,8$ cm; $\alpha' = 38^\circ 15'$. Určete zda jsou oba trojúhelníky podobné.

$$\frac{15,2}{30,4} = 0,5$$

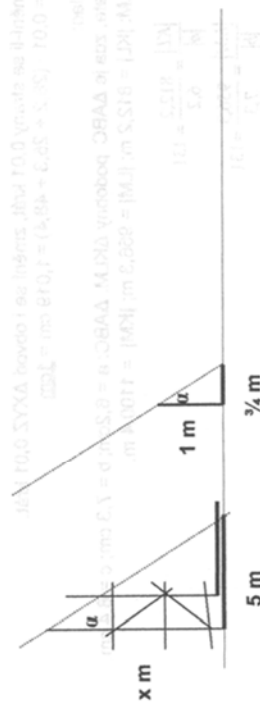
30,4
28,4

$$\frac{25,7}{56,8} = 0,5$$

$\alpha' = \alpha$



Příklad: Lešení vrhá ve 13:00 hodin 5 m stín. 1 m dlouhá k zemi kolmá tyč má ve stejnou dobu stín 1 metrový stín. Jak vysoké je lešení?



Zobrazené trojúhelníky jsou si podobné. Proto platí:

$$\frac{x}{1} = \frac{5}{2}$$

$\frac{3}{4}$ 5

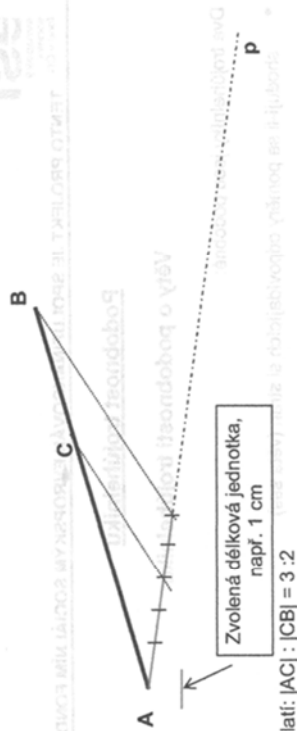
$$x = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{r} x = 20:3 \\ x = 67 \end{array}$$

ní je 6.7 m.

Výška lešení je 6.7 m.

Úkol: Rozdělte úsečku AB neznámé délky na dvě části v poměru 3 : 2.



Plati: $|AC| : |CB| = 3 : 2$

PODOBNOST TROJÚHELNÍKŮ PODLE VĚTY Ssu



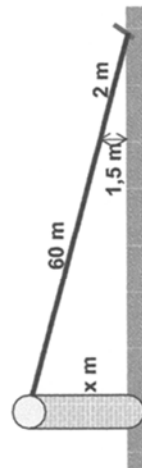
Jestliže platí, že $a/a' = c/c'$ a současně $\alpha = \alpha'$, pak $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Příklad: Z ochozu věže je spuštěné napjaté 60 metrové ocelové lano delší než je výška ochozu nad zemí. Ve vzdálenosti 2 m od ukotvení na zemi je lano 1,5 m nad zemí. Jak vysoko je věžní ochoz?

$$\frac{x}{1.5} = \frac{60}{2}$$

$$\frac{x}{15} = 30$$

$x = 45$



Ochoz věže je 45 metrů nad zemí.

REDUKČNÍ ÚHEL - pracovní list

skupina B

1. Rozděl úsečku $|AB| = 7\text{cm}$ v poměru 2:7.

2. Sestroj úsečku $|AC| = \frac{2}{3}|AB|$, je-li $|AB| = 5\text{cm}$.

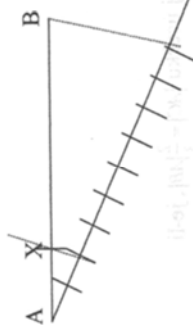
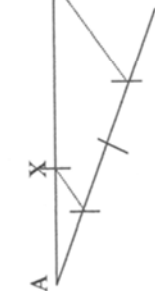
3. Sestroj úsečku $|AC| = \frac{5}{3}|AB|$, je-li $|AB| = 8\text{cm}$.

REDUKČNÍ ÚHEL - pracovní list – řešení

skupina A

1. Rozděl úsečku $|AB| = 7\text{cm}$ v poměru 1:2.

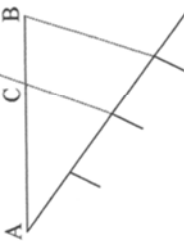
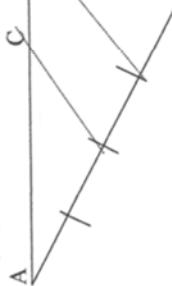
2:7.



2. Sestroj úsečku $|AC| = \frac{2}{3}|AB|$, je-li $|AB| = 8\text{cm}$.

2. 3

$|AB| = 5\text{cm}$.



3. Sestroj úsečku $|AC| = \frac{5}{3}|AB|$, je-li $|AB| = 5\text{cm}$.

$|AB| = 8\text{cm}$.

$|AB| = 5\text{cm}$.

